# Gr-catégories

HOANG XUAN Sinh

Institut pédagogique n°2 de Hanoi

Département de mathématiques

# Introduction

Ce travail se compose de trois chapitres. Le premier rassemble un certain nombre de définitions et résultats nécessaires pour les chapitres qui suivent sur les catégories munies d'une loi ⊗ qu'on peut trouver dans [2], [6], [11], [14], [15], la terminologie employée dans ce chapitre étant de Neantro Saavedra Rivano [14]. Une <u>⊗-catégorie</u> est une catégorie munie d'une loi ⊗. Une ⊗-catégorie <u>associative</u> est une ⊗-catégorie ~~telle qu'on puisse trouver~~ munie d' un isomorphisme de trifoncteurs appelé <u>contrainte d'associativité</u>

$$a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z$$

vérifiant une condition dite l'<u>axiome du pentagone</u>. Une ⊗-catégorie <u>commutative</u> est une ⊗-catégorie ~~telle qu'il existe~~ munie d' un isomorphisme de bifoncteurs appelé <u>contrainte de commutativité</u>

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

vérifiant la relation $c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = id_{X \otimes Y}$. Une contrainte de commutativité est <u>stricte</u> si

$$c_{X,X} = id_{X \otimes X}$$

pour tout X. Enfin une ⊗-catégorie est dite <u>unifère</u> s'il ~~existe~~ est donné un objet $\underline{1}$ et des isomorphismes fonctoriels

$$g_X : X \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes X$$

$$d_X : X \xrightarrow{\sim} X \otimes \underline{1}$$

tels que

$$g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$$

le triple $(\underline{1}, g, d)$ constitue une contrainte d'unité.

Une ⊗-catégorie AC (resp. AU) est une ⊗-catégorie associative et commutative (resp. associative et unifère) vérifiant une certaine condition de compatibilité. Une ⊗-catégorie ACU est une ⊗-catégorie AC et AU.

Un ⊗-foncteur d'une ⊗-catégorie $\underline{C}$ dans une ⊗-catégorie $\underline{C}'$ est un couple $(F, \breve{F})$ où $F$ est un foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et $\breve{F}$ un isomorphisme de bifoncteurs

$$\breve{F}_{X,Y} : FX \otimes FY \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y)$$

Un ⊗-foncteur associatif (resp. commutatif, unifère) est un ⊗-foncteur d'une ⊗-catégorie associative (resp. commutative, unifère) dans une ⊗-catégorie associative (resp. commutative, unifère) vérifiant une condition dite condition de compatibilité avec les contraintes d'associativité (resp. de commutativité, d'unité). Un ⊗-foncteur AC est un ⊗-foncteur associatif et commutatif, un ⊗-foncteur ACU est un ⊗-foncteur associatif, commutatif et unifère.

Pour deux ⊗-foncteurs $(F, \breve{F})$, $(G, \breve{G})$ d'une ⊗-catégorie $\underline{C}$ dans une ⊗-catégorie $\underline{C}'$, un ⊗-morphisme de $(F, \breve{F})$ dans $(G, \breve{G})$ est un morphisme fonctoriel $\lambda : F \to G$ rendant commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc}
FX \otimes FY & \xrightarrow{\breve{F}_{X,Y}} & F(X \otimes Y) \\
{\scriptstyle \lambda_X \otimes \lambda_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{X \otimes Y}} \\
GX \otimes GY & \xrightarrow{\breve{G}_{X,Y}} & G(X \otimes Y)
\end{array}$$

Le deuxième chapitre est réservé à l'étude des Gr-catégories et des Pic-catégories. Une <u>Gr-catégorie</u> est une $\otimes$-catégorie AU, dont tous les objets sont inversibles, et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde (i.e. toutes les flèches sont des isomorphismes). Une Gr-catégorie ressemble donc à un groupe. On tire de cette définition que si $\underline{P}$ est une Gr-catégorie, l'ensemble $\Pi_0(\underline{P})$ des classes à isomorphisme près d'objets de $\underline{P}$, muni de la loi de composition induite par l'opération $\otimes$, est un groupe ; le groupe $\mathrm{Aut}(\overset{\text{1-objet}}{\underline{1}}) = \Pi_1(\underline{P})$ est un groupe commutatif ; et pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$

$$\gamma_X : u \longmapsto u \otimes id_X = \mathrm{Aut}(\underline{1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X)$$

$$\delta_X : u \longmapsto id_X \otimes u = \mathrm{Aut}(\underline{1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X)$$

On attache ainsi à une Gr-catégorie $\underline{P}$, des groupes $\Pi_0(\underline{P})$, $\Pi_1(\underline{P})$ où $\Pi_1(\underline{P})$ est commutatif. On peut définir en plus, une action de $\Pi_0(\underline{P})$ dans $\Pi_1(\underline{P})$, de la façon suivante : si $s \in \Pi_0(\underline{P})$ est représenté par $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$, et $u \in \Pi_1(\underline{P})$, on pose

$$su = \delta_X^{-1}\, \gamma_X(u)$$

$\Pi_1(\underline{P})$ en devient un $\Pi_0(\underline{P})$-module à gauche.

Soient $M$ un groupe, $N$ un $M$-module (abélien à gauche). Un <u>préépinglage</u> de type $(M,N)$ pour une Gr-catégorie $\underline{P}$ est un couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \Pi_0(\underline{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \Pi_1(\underline{P}).$$

compatibles avec les actions de $M$ sur $N$, $\Pi_0(\underline{P})$ sur $\Pi_1(\underline{P})$. Une Gr-catégorie <u>préépinglée de type $(M,N)$</u> est une Gr-catégorie munie d'un préépinglage. Enfin, un *morphisme* de Gr-catégories préépinglées de type $(M,N)$ $(\underline{P}, \varepsilon) \longrightarrow (\underline{P}', \varepsilon')$ est un $\otimes$-foncteur associatif tel que les triangles

$$\begin{tikzcd} \Pi_0(\underline{P}) \arrow[rr] & & \Pi_0(\underline{P}') \\ & M \arrow[ul, "\varepsilon_0"] \arrow[ur, "\varepsilon'_0"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Pi_1(\underline{P}) \arrow[rr] & & \Pi_1(\underline{P}') \\ & N \arrow[ul, "\varepsilon_1"] \arrow[ur, "\varepsilon'_1"'] & \end{tikzcd}$$

soient commutatifs. On en déduit que tout tel morphisme est une $\otimes$-équivalence, donc l'ensemble des classes d'équivalence de Gr-catégories préépinglées de type $(M,N)$ est égal à l'ensemble des *composantes connexes* de la catégorie des Gr-catégories préépinglées de type $(M,N)$. Si on considère le groupe de cohomologie $H^3(M,N)$ du groupe $M$ à valeurs dans le $M$-module $N$ (au sens de la cohomologie des groupes [12]) on obtient une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équivalence de Gr-catégories préépinglées de type $(M,N)$ et l'ensemble $H^3(M,N)$.

Une *Pic-catégorie* est une Gr-catégorie munie d'une contrainte de commutativité compatible avec sa contrainte d'associativité, ce qui fait qu'une Pic-catégorie ressemble à un groupe commutatif. On vérifie aussitôt qu'une condition nécessaire pour l'existence d'une structure de Pic-catégorie sur une Gr-catégorie $\underline{P}$ est vague que $\Pi_0(\underline{P})$ soit commutatif et agisse trivialement sur $\Pi_1(\underline{P})$. Une Pic-catégorie est *stricte* si sa contrainte de commutativité est stricte.

Soient $M, N$ des groupes abéliens. Un *préépinglage* de type $(M,N)$ pour une Pic-catégorie $\underline{P}$ est un couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \Pi_0(\underline{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \Pi_1(\underline{P})$$

Une Pic-catégorie *préépinglée de type (M,N)* est une Pic-catégorie munie d'un préépinglage. On définit *les morphismes* de tels objets de la même façon qu'on a fait pour les Gr-catégories.

Pour formuler des propositions, on introduit deux complexes de groupes abéliens libres.

$$L.(M) \ : \ L_3(M) \xrightarrow{d_3} L_2(M) \xrightarrow{d_2} L_1(M) \xrightarrow{d_1} L_0(M) \longrightarrow M$$

$$'L.(M) \ : \ 'L_3(M) \xrightarrow{'d_3} 'L_2(M) \xrightarrow{'d_2} 'L_1(M) \xrightarrow{'d_1} 'L_0(M) \longrightarrow M$$

dont le premier est une résolution tronquée de M, i.e est une suite exacte. On obtient une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équivalence de Pic-catégories préépinglées de type (M,N) et l'ensemble $H^2(\mathrm{Hom}('L.(M), N))$. L'exactitude de du complexe L.(M) nous donne la trivialité de la classification des Pic. catégories strictes préépinglées de type (M,N), i.e toutes les Pic-catégories strictes préépinglées de type (M,N) sont équivalentes.

Enfin le troisième chapitre donne la construction de la solution de deux problèmes universels : celui de rendre des objets "objet unité" et celui d'inverser des objets.

Soient $\underline{A}$ une ⊗-catégorie AC, $\underline{A}'$ une autre ⊗-catégorie AC dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, et $(T, \breve{T}) : \underline{A}' \longrightarrow \underline{A}$ un ⊗-foncteur AC. On cherche à rendre les objets TA' de $\underline{A}$, $A' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$, "objet unité", c'est à dire on cherche :

1° Une ⊗-catégorie ACU $\underline{P}$ ;

2° Un ⊗-foncteur AC $(D, \breve{D}) : \underline{A} \to \underline{P}$ ;

3° Un ⊗-isomorphisme

$$\lambda : (D, \breve{D}) \circ (T, \breve{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{P}}, \breve{I}_{\underline{P}})$$

où $(I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$ est le ⊗-foncteur $1_{\underline{P}}$ constant de $\underline{A}'$ dans $\underline{P}$. Le triple $(\underline{P}, (D, \check{D}), \lambda)$ est tel qu'il soit universel pour les triples $(\underline{Q}, (E, \check{E}), \mu)$ vérifiant 1°, 2°, 3°.

1-universel ou 2-universel

Pour le problème d'inverser des objets, on considère une ⊗-catégorie ACU $\underline{C}$, une ⊗-catégorie ACU $\underline{C}'$ dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, et un ⊗-foncteur ACU $(F, \check{F}) : \underline{C}' \to \underline{C}$. On cherche une ⊗-catégorie ACU $\underline{P}$ et un ⊗-foncteur ACU $(\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}}) : \underline{C} \to \underline{P}$ ayant les propriétés suivantes :

1° $\mathcal{D}FX'$ est inversible dans $\underline{P}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$.

2° Pour tout ⊗-foncteur ACU $(\mathcal{E}, \check{\mathcal{E}})$ de $\underline{C}$ dans une ⊗-catégorie ACU $\underline{Q}$ tel que $\mathcal{E}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$, il existe un ⊗-foncteur ACU $(E', \check{E}')$ unique (à ⊗-isomorphisme ~~près~~ unique) de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ tel que $(\mathcal{E}, \check{\mathcal{E}}) \simeq (E', \check{E}') \circ (\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$.

Ce problème se ramène au premier. Il suffit de poser $\underline{A}' = \underline{C}'$, $\underline{A} = \underline{C}' \times \underline{C}$, $TX' = (FX', X')$, et de remarquer que si $\underline{C}, \underline{C}', \underline{Q}$ sont des ⊗-catégories ACU, $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{C}, \underline{Q})$ la catégorie des ⊗-foncteurs ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{Q}$, alors on a une équivalence canonique de catégories

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{C} \times \underline{C}', \underline{Q}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{C}, \underline{Q}) \times \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{C}', \underline{Q}) .$$

La ⊗-catégorie ACU $\underline{P}$ ainsi définie est appelée la <u>⊗-catégorie de fractions</u> de la catégorie $\underline{C}$ définie par $(\underline{C}', (F, \check{F}))$. La ⊗-catégorie de fractions de $\underline{C}^{is}$ définie par $(\underline{C}^{is}, (id_{\underline{C}^{is}}, id))$ est une Pic-catégorie, on l'appelle la <u>Pic-enveloppe</u> de la catégorie $\underline{C}$ et on la note $\underline{\mathrm{Pic}}(\underline{C})$. Pour $\underline{C} = \mathcal{P}(R)$, catégorie des R-modules projectifs de type fini (R un anneau unitaire) et $\underline{P} = \mathrm{Pic}(\mathcal{P}(R))$, on obtient

Pic(C)

$$\pi_0(\underline{P}) \simeq K^0(R)$$

$$\pi_1(\underline{P}) \simeq K^1(R)$$

où $K^0(R)$ est le groupe de Grothendieck et $K^1(R)$ le groupe de Whitehead [1].

La considération de la $\otimes$-catégorie de fractions d'une $\otimes$-catégorie ACU nous donne le résultat suivant :

Soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU, $Z$ un objet quelconque de $\underline{C}$

!! ~~différent de l'objet unité 1~~, $S$ le foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}$ défini par

$$X \longmapsto X \otimes Z$$

On appelle <u>catégorie de suspension</u> de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ définie par l'objet $Z$, le triple $(\underline{P}, i, p)$, solution du problème universel pour

Pb 2-universel les triples $(\underline{Q}, j, q)$ où $\underline{Q}$ est une catégorie, $j$ un foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{Q}$, $q$ une équivalence de $\underline{Q}$ dans $\underline{Q}$, tels que le carré

$$\begin{tikzcd} \underline{C} \arrow[r, "S"] \arrow[d, "j"'] & \underline{C} \arrow[d, "j"] \\ \underline{Q} \arrow[r, "q"] & \underline{Q} \end{tikzcd}$$

vague

soit commutatif (à <u>isomorphisme fonctoriel</u> près) i.e. $qj \simeq jS$.

Dans le cas où $\underline{C}$ est la catégorie homotopique pointée $\underline{Htp}_*$ munie du produit contracté $\wedge$, des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité habituelles et $Z$ la 1-sphère $S^1$, $S$ est par conséquent le foncteur de suspension, on retrouve la définition connue de catégorie de suspension.

Soient $\underline{C}'$ la sous-catégorie $\otimes$-stable de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ engendrée par $Z$ et $\underline{P}$ la catégorie de fractions de $\underline{C}$ définie par $(\underline{C}', (F, id))$ où $F : \underline{C}' \to \underline{C}$ est le foncteur d'inclusion. On obtient un foncteur $G : \underline{P} \to \underline{P}$ de la catégorie de suspension $\underline{P}$ dans la $\otimes$-catégorie de fractions $\underline{P}$. Si $G$ n'est pas fidèle (ce qui se produit dans le cas où $\underline{C} = \underline{Htp}_*$, $Z = S^1$ et la loi $\otimes$ est le produit contracté $\wedge$ ) alors il est impossible de construire dans $\underline{P}$ une loi $\otimes$ telle que $\underline{P}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU, i.e. inversible dans $\underline{P}$ et $i$ immergé dans un couple $(i, \breve{i})$ qui est un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{P}$.

Ces deux problèmes universels ont été posés par Monsieur Grothendieck lors de son séjour à l'Université de Hanoi en Novembre 1967. Je tiens à lui exprimer ici tous mes remerciements pour ses précieuses directives.

Chapitre I

# ⊗-Catégories et ⊗-foncteurs

## §1. ⊗-Catégories.

### 1. Définition des ⊗-catégories.

Définition 1.– Soit $\underline{C}$ une catégorie ; un foncteur $\underline{C} \times \underline{C} \to \underline{C}$ est appelé une ⊗-structure sur $\underline{C}$, ou encore une loi ⊗ sur $\underline{C}$. Une ⊗-catégorie est une catégorie $\underline{C}$ munie d'une ⊗-structure qu'on note $\otimes_{\underline{C}}$, ou simplement ⊗, si aucune confusion n'est possible ; à des objets X, Y de $\underline{C}$, on associe donc un objet $X \otimes Y$ de $\underline{C}$ appelé produit tensoriel des objets X et Y, qui dépend fonctoriellement de (X,Y), i.e à des flèches $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ de $\underline{C}$, on a une flèche $f \otimes g : X \otimes Y \to X' \otimes Y'$ de $\underline{C}$ appelé produit tensoriel des flèches f et g, vérifiant les relations $id_X \otimes id_Y = id_{X \otimes Y}$, $f'f \otimes g'g = (f' \otimes g')(f \otimes g)$ au cas où f, f' et g, g' sont composables.

Définition 2.– Soit X un objet d'une ⊗-catégorie $\underline{C}$. On dit que X est régulier si les foncteurs, définis par les applications

$$Y \mapsto Y \otimes X \, , \quad f : Y \to Z \longmapsto f \otimes id_X : Y \otimes X \to Z \otimes X$$

et

$$Y \longmapsto X \otimes Y \, , \quad f : Y \to Z \longmapsto id_X \otimes f \; : X \otimes Y \to X \otimes Z$$

de $\underline{C}$ dans $\underline{C}$ sont des équivalences de catégories. On vérifie aisément que si $X$ est régulier et si $X' \simeq X$ i.e $X'$ est isomorphe à $X$, alors $X'$ est aussi régulier.

## 2. Exemples de $\otimes$-catégories.

1) Soit $\underline{C}$ une catégorie dans laquelle le produit des couples d'objets existe. Pour tout couple $(X, Y)$, choisissons un produit $(X \times Y, p_X, p_Y)$. On définit alors une $\otimes$-structure sur $\underline{C}$ en posant pour des objets $X, Y$

$$X \otimes Y = X \times Y,$$

pour des flèches $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$,

$$f \otimes g = f \times g.$$

On vérifie sans difficulté que, dans cette $\otimes$-catégorie, les objets réguliers sont les objets finaux.

2) Soit $\underline{C}$ la catégorie $\underline{\text{Mod}}(A)$ des modules sur un anneau commutatif unitaire $A$. Le produit tensoriel de $A$-modules définit une loi $\otimes$ sur $\underline{C}$. Ici les objets réguliers sont les $A$-modules projectifs de rang 1 [4].

3) Soit $(X, x_0)$ un espace topologique pointé. On définit une catégorie $\underline{C}$ de la façon suivante : les objets de $\underline{C}$ sont les lacets de $X$ localisés en $x_0$ ; si $\omega_1, \omega_2$ sont deux lacets, $\text{Hom}_{\underline{C}}(\omega_1, \omega_2)$ est l'ensemble d'homotopies $\omega_1 \to \omega_2$ modulo la relation d'homotopie. La composition des lacets définit une $\otimes$-structure sur $\underline{C}$. Dans cette $\otimes$-catégorie tous les objets sont réguliers.

4) Soient $\underline{C}$ une catégorie additive, $\underline{E}$ une catégorie cofibrée sur $\underline{C}$ [10]. Pour tout objet $A$ de $\underline{C}$, la fibre de $\underline{E}$ en $A$ est noté $\underline{E}(A)$. L'homomorphisme somme

dans $\underline{C}$ donne naissance à un foncteur

$$\underline{E}(A) \times \underline{E}(A) \longrightarrow \underline{E}(A)$$

qui fait de $\underline{E}(A)$ une $\otimes$-catégorie.

5) Soient $M$ un groupe, $N$ un $M$-module abélien à gauche. On construit une catégorie $\underline{C}$ dont les objets sont les éléments de $M$, les morphismes sont des automorphismes. Pour $s \in M$, on définit

$$\mathrm{Aut}_{\underline{C}}(s) = \{s\} \times N$$

La composition des flèches dans $\underline{C}$ provient de l'addition dans $N$. On définit sur $\underline{C}$ une loi $\otimes$ de la façon suivante : si $s_1$, $s_2 \in M$, on pose

$$s_1 \otimes s_2 = s_1 s_2 \quad ;$$

si $(s_1, u_1), (s_2, u_2)$ sont des morphismes ($u_1, u_2 \in N$), on pose

$$(s_1, u_1) \otimes (s_2, u_2) = (s_1 s_2,\ u_1 + s_1 u_2).$$

Ici tous les objets de la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ sont réguliers en vertu du fait que $M$ est un groupe et l'ensemble des flèches de $\underline{C}$ muni de la loi $\otimes$ est aussi un groupe, à savoir le produit semi-direct $M.N$.

Dans le cas où $N$ est un $M$-module abélien à droite, on définit la loi $\otimes$ dans $\underline{C}$ par

$$s_1 \otimes s_2 = s_1 s_2 \quad .$$

$$(s_1, u_1) \otimes (s_2, u_2) = (s_1 s_2,\ u_1 s_2 + u_2).$$

## §2. Contraintes pour une loi $\otimes$.

### 1. Contraintes d'associativité.

Définition 1. — Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une contrainte d'associativité pour $\underline{C}$ est un isomorphisme fonctoriel $a$

$$a_{X,Y,Z} : X\otimes(Y\otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X\otimes Y)\otimes Z$$

tel que pour des objets $X, Y, Z, T$ de $\underline{C}$ le diagramme suivant soit commutatif (axiome du pentagone)

$$\begin{tikzcd}
 & (X\otimes Y)\otimes(Z\otimes T) \arrow[dr, "a_{X\otimes Y,Z,T}"] & \\
X\otimes(Y\otimes(Z\otimes T)) \arrow[ur, "a_{X,Y,Z\otimes T}"] \arrow[d, "id_X\otimes a_{Y,Z,T}"'] & & ((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes T \\
X\otimes((Y\otimes Z)\otimes T) \arrow[rr, "a_{X,Y\otimes Z,T}"] & & (X\otimes(Y\otimes Z))\otimes T \arrow[u, "a_{X,Y,Z}\otimes id_T"']
\end{tikzcd}$$

Définition 2. — On appelle $\otimes$-catégorie associative une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte d'associativité.

Définition 3. — Deux contraintes d'associativité $a$ et $a'$ d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ sont dits cohomologues s'il existe un automorphisme fonctoriel $\varphi$ du foncteur $\otimes : \underline{C}\times\underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$(1)\qquad\begin{tikzcd}
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "id_X\otimes\varphi_{Y,Z}"'] & (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[d, "\varphi_{X,Y}\otimes id_Z"] \\
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[d, "\varphi_{X,Y\otimes Z}"'] & (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[d, "\varphi_{X\otimes Y,Z}"] \\
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "a'_{X,Y,Z}"] & (X\otimes Y)\otimes Z
\end{tikzcd}$$

pour des objets $X, Y, Z$ de $\underline{C}$.

Exemples. — 1) Toutes les $\otimes$-catégories données dans (§1, n°2) sont des $\otimes$-catégories associatives.

2) Dans l'exemple 5) du (§1, n°2), il y a une contrainte d'associativité évidente à savoir l'identité. On va voir qu'il y en a d'autres. Se donner un morphisme de trifoncteurs $a$ revient dans

ce cas à se donner une application $f : M^3 \to N$, la relation entre $f$ et $a$ étant

$$a_{s_1, s_2, s_3} = (s_1 s_2 s_3 ,\ f(s_1, s_2, s_3)).$$

Lorsqu'on écrit l'axiome du pentagone en utilisant cette relation, on trouve

$$s_1 f(s_2, s_3, s_4) - f(s_1 s_2, s_3, s_4) + f(s_1, s_2 s_3, s_4) - f(s_1, s_2, s_3 s_4) + f(s_1, s_2, s_3) = 0$$

où l'on a posé $X = s_1$, $Y = s_2$, $Z = s_3$, $T = s_4$. Autrement dit $f : M^3 \to N$ définit une contrainte d'associativité si et seulement si $f$ est un 3-cocycle de $M$ à valeurs dans le $M$-module $N$, au sens de la cohomologie des groupes [12]. On explicite de même (1) pour démontrer que des 3-cocycles $f, f'$ déterminent des contraintes d'associativité cohomologues si et seulement si $f, f'$ sont des cocycles cohomologues. On trouve donc, dans ce cas, que le groupe des contraintes d'associativité, sous-groupe du groupe des automorphismes du foncteur $(s_1, s_2, s_3) \longmapsto s_1 s_2 s_3$, est isomorphe au groupe $Z^3(M,N)$ des 3-cocycles de $M$ à valeurs dans $N$. De même, le groupe des contraintes d'associativité modulo cohomologie est isomorphe au groupe cohomologique $H^3(M,N)$.

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$, indexée par un ensemble fini non vide totalement ordonné $(I,<)$. Au moyen des $X_i$ et de la loi $\otimes$, nous allons construire des objets de $\underline{C}$ qu'on appelle des <u>produits des $X_i$ relativement à l'ordre $<$</u>. Par exemple pour $I = \{\alpha\}$, nous avons un seul produit $X_\alpha$; pour $I = \{\alpha, \beta\}$ avec $\alpha < \beta$, nous avons aussi un seul produit $X_\alpha \otimes X_\beta$ ; pour $I = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ avec $\alpha < \beta < \gamma$, nous avons deux produits $X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes X_\gamma)$ et $(X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes X_\gamma$ ; pour $I = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ avec $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, nous avons cinq produits $X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes (X_\gamma \otimes X_\delta))$, $(X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes (X_\gamma \otimes X_\delta)$, $((X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes X_\gamma) \otimes X_\delta$, $(X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes X_\gamma)) \otimes X_\delta$, $X_\alpha \otimes ((X_\beta \otimes X_\gamma) \otimes X_\delta)$. Parmi ces produits relativement à l'ordre $<$, nous allons en choisir un que nous appellons le produit canonique de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $<$.

<u>Définition 4</u>.- Soit $(X_i)_{i\in J}$ une famille d'objets d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$, indexée par un ensemble totalement ordonné non vide $(J,<)$. Pour chaque ensemble non vide fini $I \subset J$ (totalement ordonné par l'ordre induit), on appelle le <u>produit canonique de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $<$</u>, l'objet de $\underline{C}$, noté $\underset{I}{\otimes} X_i$, et défini par récurrence sur le nombre d'éléments de $I$ de la manière suivante :

1° Si $I = \{\beta\}$, alors $\underset{I}{\otimes} X_i = X_\beta$ ;

2° Si $I$ a $p$ éléments $(p>1)$ avec $\beta$ le plus grand élément et $I'$ l'ensemble des éléments $<\beta$ de $I$, alors $\underset{I}{\otimes} X_i = (\underset{I'}{\otimes} X_i)\otimes X_\beta$.

D'après cette définition, pour $I = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, le produit canonique de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $\alpha<\beta<\gamma$ est $(X_\alpha\otimes X_\beta)\otimes X_\gamma$. Dans ce qui suit de ce n°, nous dirons <u>produit canonique</u> (resp. <u>produit</u>) de la famille $(X_i)_{i\in I}$ au lieu de dire produit canonique de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $<$ (resp. produit de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $<$) si aucune confusion n'est à craindre.

Soit $(X_i)_{i\in J}$ une famille d'objets d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ associative, indexée par un ensemble non vide totalement ordonné $(J,<)$. Les ensembles non vides $I\subset J$ considérés ci-dessous sont des ensembles finis totalement ordonnés par l'ordre induit.

<u>Définition 5</u>.- Pour chaque couple $(I_1, I_2)$ de sous-ensembles non vides de $I$, tels que $I = I_1 \amalg I_2$ et que tout $i_1\in I_1$ est plus petit que tout $i_2 \in I_2$, soit $\phi_{I_1,I_2}$ un isomorphisme fonctoriel en les $X_i$, $i\in I$,

$$\underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow[\sim]{\phi_{I_1,I_2}} (\underset{I_1}{\otimes} X_i)\otimes(\underset{I_2}{\otimes} X_i)$$

défini par récurrence sur le nombre d'éléments de $I_2$ de la manière suivante :

1° Si $I_2 = \{\beta\}$, alors

$$\phi_{I_1, I_2} : \bigotimes_I X_i = (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes X_\beta$$

est l'identité ;

2° Si $I_2$ a $p > 1$ éléments avec $\beta$ le plus grand éléments et $I_2'$ l'ensemble des éléments $< \beta$ de $I_2$, alors $\phi_{I_1, I_2}$ est défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) = (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2'} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[d, "a"] \\
(\bigotimes_{I_1 \amalg I_2'} X_i) \otimes X_\beta \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2'} \otimes id_{X_\beta}"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2'} X_i)) \otimes X_\beta
\end{tikzcd}$$

<u>Proposition 1</u>.– Pour chaque triple $(I_1, I_2, I_3)$ de sous-ensembles non vides de $I$ tels qu'on ait $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$ et $i_1 < i_2 < i_3$ pour $i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2$, $i_3 \in I_3$, le diagramme suivant est commutatif

(2)
$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2 \amalg I_3} X_i) \arrow[r, "id \otimes \phi_{I_2, I_3}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1 \amalg I_2, I_3}"] & (\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.– Nous allons démontrer le théorème par récurrence sur le nombre d'éléments de $I_3$.

1° Si $I_3 = \{\beta\}$, alors (2) devient le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2 \amalg I_3} X_i) \arrow[r, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, equal] & (\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes X_\beta \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes X_\beta
\end{tikzcd}$$

qui est commutatif par définition de $\phi_{I_1, I_2 \amalg \{\beta\}}$.

2° Si $I_3$ a $p > 1$ éléments avec $\beta$ le plus grand élément et $I'_3$ l'ensemble des éléments $< \beta$ de $I_3$, nous démontrons la commutativité de (2) en considérant le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2 \amalg I'_3} \otimes id"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \big((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2 \amalg I'_3} X_i)\big) \otimes X_\beta \arrow[r, "(id \otimes \phi_{I_2, I'_3}) \otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \Big((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes \big((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I'_3} X_i)\big)\Big) \otimes X_\beta \arrow[dddd, bend left, "\alpha \otimes id"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes \big((\bigotimes_{I_2 \amalg I'_3} X_i) \otimes X_\beta\big) \arrow[r, "id \otimes (\phi_{I_2, I'_3} \otimes id)"] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes \Big(\big((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I'_3} X_i)\big) \otimes X_\beta\Big) \arrow[u, "\alpha"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes \big((\bigotimes_{I_2 \amalg I'_3} X_i) \otimes X_\beta\big) \arrow[r, "id \otimes \phi_{I_2, I_3}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes \Big((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes \big((\bigotimes_{I'_3} X_i) \otimes X_\beta\big)\Big) \arrow[u, "id \otimes \alpha"] \arrow[d, "\alpha"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1 \amalg I_2, I_3}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & (\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes \big((\bigotimes_{I'_3} X_i) \otimes X_\beta\big) \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2} \otimes id"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & \big((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)\big) \otimes \big((\bigotimes_{I'_3} X_i) \otimes X_\beta\big) \arrow[d, "\alpha"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1 \amalg I_2, I'_3} \otimes id"] & \big((\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I'_3} X_i)\big) \otimes X_\beta \arrow[r, "(\phi_{I_1, I_2} \otimes id) \otimes id"] & \Big(\big((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)\big) \otimes (\bigotimes_{I'_3} X_i)\Big) \otimes X_\beta
\end{tikzcd}
$$

dans lequel les régions (II), (VII) sont commutatives par naturalité de $a$ ; les régions (I), (IV), (VI) par définition de $\phi$ ( Déf. 5) ; la région (III) par évidence ; la région (VIII) par l'axiome du pentagone ; enfin le circuit extérieur par hypothèse de récurrence. D'où la commutativité de la région (V) qui n'est ~~pas~~ autre que le diagramme (2) en se rappellant de la définition de $\underset{I}{\otimes} X_i$ ( Déf. 4).

faire cette défi. dans le cas général

<u>Proposition 2.</u>– Chaque produit $Y$ d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ est isomorphe au produit canonique $\underset{I}{\otimes} X_i$ par un isomorphisme

$$y : \underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow{\sim} Y$$

fonctoriel en les $X_i$.

<u>Démonstration.</u>– Nous allons démontrer la proposition par récurrence sur le nombre d'éléments de $I$. Pour $I = \{\beta\}$, l'isomorphisme est l'identité $X_\beta = X_\beta$. Pour $I$ ayant $p > 1$ éléments, en remarquant que $Y$ doit être de la forme $Y = Z \otimes T$, $Z$ et $T$ étant des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement avec $I = I_1 \amalg I_2$ et $i_1 < i_2$ pour $i_1 \in I_1$ et $i_2 \in I_2$, on définit $y$ par le composé des isomorphismes

$$\underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow{\phi_{I_1,I_2}} (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i) \xrightarrow{z \otimes t} Z \otimes T = Y$$

où $z$ et $t$ sont des isomorphismes définis par hypothèse de récurrence. L'isomorphisme $y$ construit comme ci-dessus est appelé l'<u>isomorphisme canonique</u>.

<u>Proposition 3.</u> – Soient $I_1, I_2, I_3$ des sous-ensembles non vides de $I$ tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$ et $i_1 < i_2 < i_3$ pour $i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2$, $i_3 \in I_3$ ; et soient $Y, Z, T$ des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$, $(X_i)_{i\in I_3}$ respectivement. Alors le diagramme

(3)
$$\begin{tikzcd}
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "b"] \arrow[d, equal] & Y \otimes (Z \otimes T) \arrow[d, "a_{Y,Z,T}"] \\
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "b'"] & (Y \otimes Z) \otimes T
\end{tikzcd}$$

est commutatif, $b$ et $b'$ étant les isomorphismes canoniques.

<u>Démonstration</u>. – Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2 \amalg I_3} X_i) \arrow[r, "id \otimes \phi_{I_2, I_3}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i)) \arrow[r, "y \otimes (z \otimes t)"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & Y \otimes (Z \otimes T) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\phi_{I_1 \amalg I_2, I_3}"] & (\bigotimes\limits_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i) \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2} \otimes id"] & ((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i) \arrow[r, "(y \otimes z) \otimes t"] & (Y \otimes Z) \otimes T
\end{tikzcd}$$

où $y, z, t$ sont les isomorphismes canoniques. Remarquons d'abord que les composés des isomorphismes horizontaux du diagramme donnent respectivement les isomorphismes canoniques $b$ et $b'$ du diagramme (3). On a la commutativité de la région (I) en vertu de la proposition 1, et celle de la région (II) par la naturalité de $a$. D'où la commutativité du circuit extérieur, et donc celle de (3).

On peut énoncer la proposition 3 sous forme plus générale dont la vérification est immédiate.

<u>Proposition 4</u>. – Soient $Y_1, Y_2$ des produits de $(X_i)_{i\in I}$ et $\tau : Y_1 \xrightarrow{\sim} Y_2$ un isomorphisme construit à l'aide de $a$, $a^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$ ; alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, equal] & Y_1 \arrow[d, "\tau"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "b_2"] & Y_2
\end{tikzcd}$$

où $b_1, b_2$ sont les isomorphismes canoniques, est commutatif.

<u>Proposition 5</u>. – Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ des produits de $(X_i)_{i\in I}$, $\tau_{i,i+1} : Y_i \xrightarrow{\sim} Y_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ et $\tau_{n1} : Y_n \xrightarrow{\sim} Y_1$ des isomorphismes construits au moyen de $a$, $a^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$. Alors le polygone suivant

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1 \arrow[r, "\tau_{12}"] & Y_2 \arrow[dr, "\tau_{23}"] & \\
Y_n \arrow[ur, "\tau_{n1}"] & & & Y_3 \arrow[d, dotted] \\
\cdot \arrow[u] & \cdot \arrow[l, dotted] & & \cdot \arrow[ll, dotted]
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. — En effet, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "\tau_{12}"] & Y_2 \arrow[r, "\tau_{23}"] & Y_3 \cdots\cdots & Y_{n-1} \arrow[r, "\tau_{n-1,n}"] & Y_n \arrow[llll, bend right, "\tau_{n1}"'] \\
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[u, "b_1"] \arrow[r, equal] & \underset{I}{\otimes} X_i \arrow[u, "b_2"] \arrow[r, equal] & \underset{I}{\otimes} X_i \cdots\cdots \arrow[u, "b_2"] & \underset{I}{\otimes} X_i \arrow[u, "b_{n-1}"] \arrow[r, equal] & \underset{I}{\otimes} X_i \arrow[u, "b_n"']
\end{tikzcd}$$

(1) (2) (3) (n)

où les $b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sont des isomorphismes canoniques, a les régions (2), (3),.... (n) et le circuit extérieur commutatifs en vertu de la proposition 4. D'où la commutativité de la région (1) qui est le polygone considéré de la proposition.

Exemple 3). — En vertu de la proposition 5, le pentagone suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & (X_1 \otimes X_2) \otimes ((X_3 \otimes X_4) \otimes X_5) \arrow[dr, "id \otimes a^{-1}_{X_3, X_4, X_5}"] & \\
((X_1 \otimes X_2) \otimes (X_3 \otimes X_4)) \otimes X_5 \arrow[ur, "a^{-1}_{X_1 \otimes X_2, X_3 \otimes X_4, X_5}"] \arrow[d, "a_{X_1 \otimes X_2, X_3, X_4} \otimes id"'] & & (X_1 \otimes X_2) \otimes (X_3 \otimes (X_4 \otimes X_5)) \arrow[d, "a_{X_1 \otimes X_2, X_3, X_4 \otimes X_5}"] \\
(((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3) \otimes X_4) \otimes X_5 & & ((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3) \otimes (X_4 \otimes X_5) \arrow[ll, "a_{(X_1 \otimes X_2) \otimes X_3, X_4, X_5}"]
\end{tikzcd}$$

## 2. Contraintes de commutativité.

Définition 6. — Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une contrainte de commutativité pour $\underline{C}$ est un isomorphisme fonctoriel c

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

tel qu'on ait

$$(4) \qquad c_{X,Y} \circ c_{Y,X} = id_{Y \otimes X}$$

Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte de commutativité est appelée une <u>$\otimes$-catégorie commutative</u>.

<u>Définition 7</u>.– Deux contraintes de commutativité $c$ et $c'$ d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ sont dites <u>cohomologues</u> s'il existe un automorphisme fonctoriel $\varphi$ du foncteur $\otimes : \underline{C} \times \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$(5) \qquad \begin{array}{ccc} X\otimes Y & \xrightarrow{c_{X,Y}} & Y\otimes X \\ \varphi_{X,Y}\big\downarrow & & \big\downarrow \varphi_{Y,X} \\ X\otimes Y & \xrightarrow[c'_{X,Y}]{} & Y\otimes X \end{array}$$

<u>Définition 8</u>.– Si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte de commutativité $c$, $X$ un objet de $\underline{C}$, on appelle <u>symétrie canonique</u> de $X\otimes X$ l'automorphisme

$$c_X = c_{X,X} : X\otimes X \xrightarrow{\sim} X\otimes X .$$

On dit que la contrainte de commutativité $c$ est <u>stricte</u> si les symétries canoniques sont des identités ; $\underline{C}$ est alors appelée une <u>$\otimes$-catégorie strictement commutative</u>.

<u>Exemple</u>.— Dans l'exemple 5) du (§1, n°2), on vérifie aussitôt qu'il existe des contraintes de commutativité si et seulement si $M$ est commutatif et opère trivialement sur $N$. Se donner une contrainte de commutativité $c$ revient dans ce cas à se donner une fonction antisymétrique $k : M^2 \longrightarrow N$, la relation entre $k$ et $c$ étant

$$c_{s_1,s_2} = (s_1 s_2, k(s_1,s_2))$$

Ici le groupe des contraintes de commutativité, sous-groupe du groupe des automorphismes du foncteur $(s_1,s_2) \longmapsto s_1 s_2$, est isomorphe canoniquement au groupe $\mathrm{Ant}^2(M,N)$ des fonctions antisymétriques $M^2 \longrightarrow N$. Quand on écrit la commutativité du diagramme (5) en y remplaçant $X, Y$ par $s_1, s_2$ respectivement et en posant

$$\varphi_{s_1,s_2} = (s_1 s_2, h(s_1,s_2)) , \quad h \in C^2(M,N) \text{ étant une 2-cochaîne,}$$

on obtient

$$k = {}^{t}k + \mathrm{ant}(h)$$

avec

$$\mathrm{ant}(h)\,(S_1, S_2) = h(S_1, S_2) - h(S_2, S_1).$$

Il en résulte que le groupe des classes de cohomologie de contraintes de commutativité dans ce cas s'identifie à $\mathrm{Ant}^2(M,N)/\mathrm{ant}(C^2(M,N))$ où $\mathrm{ant}(C^2(M,N))$ est le groupe des fonctions antisymétriques de la forme $\mathrm{ant}(h)$ avec $h \in C^2(M,N)$.

3. Contraintes d'unité.

Définition 9.– Soit $\underline{C}$ une $\otimes$– catégorie. Une contrainte d'unité pour $\underline{C}$, ou simplement une unité pour $\underline{C}$ est un triple $(\underline{1}, g, d)$, où $\underline{1}$ est un objet de $\underline{C}$ appelé objet unité et $g$, $d$ sont des isomorphismes fonctoriels

$$g_X : X \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes X \quad , \quad d_X : X \xrightarrow{\sim} X \otimes \underline{1}$$

vérifiant la condition

$$(6) \qquad g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$$

On note encore $d$ l'isomorphisme $g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$. On peut remarquer que les foncteurs

$$X \longmapsto \underline{1} \otimes X \quad \text{et} \quad X \longmapsto X \otimes \underline{1}$$

sont des équivalences de catégories, d'où l'objet $\underline{1}$ est régulier (§1, n°1, Déf. 2). Une $\otimes$-catégorie munie d'une unité est dite unifère.

Proposition 6.– Soit $\underline{C}$ une $\otimes$– catégorie munie d'une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$. Pour tout objet $X$ de $\underline{C}$, on a les formules

$$(7) \qquad g_{\underline{1}\otimes X} = id_{\underline{1}} \otimes g_X \quad , \quad d_{X\otimes \underline{1}} = d_X \otimes id_{\underline{1}}$$

Démonstration.– La naturalité de $g$, $d$ donne les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g_X"] \arrow[d, "g_X"'] & 1\otimes X \arrow[d, "id_1 \otimes g_X"] \\ 1\otimes X \arrow[r, "g_{1\otimes X}"'] & 1\otimes(1\otimes X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "d_X"] \arrow[d, "d_X"'] & X\otimes 1 \arrow[d, "d_X \otimes id_1"] \\ X\otimes 1 \arrow[r, "d_{X\otimes 1}"'] & (X\otimes 1)\otimes 1 \end{tikzcd}$$

ce qui démontre les formules.

<u>Proposition 7</u>. — Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une unité $(\underline{1}, g, d)$ ; alors le monoïde End $(\underline{1})$ est commutatif.

<u>Démonstration</u>. — Grâce à l'isomorphisme $1 \overset{d}{\xrightarrow{\sim}} 1\otimes 1$, il suffit donc de prouver que End $(\underline{1}\otimes\underline{1})$ est commutatif. Puisque $\underline{1}$ est régulier (Déf. 9), tout endomorphisme $f$ de $\underline{1}\otimes\underline{1}$ peut s'exprimer

$$f = u\otimes id_{\underline{1}} = id_{\underline{1}}\otimes v \ , \qquad u, v \in \mathrm{End}(\underline{1}).$$

Si $f'$ est un autre endomorphisme, on a

$$f' = u'\otimes id_{\underline{1}} = id_{\underline{1}}\otimes v',$$

d'où

$$ff' = (u\otimes id_{\underline{1}})(id_{\underline{1}}\otimes v') = u\otimes v' = (id_{\underline{1}}\otimes v')(u\otimes id_{\underline{1}}) = f'f.$$

<u>Remarques</u>. — 1) En vertu de la naturalité de $g, d$ et de la relation $g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$, on a $u\otimes id_{\underline{1}} = id_{\underline{1}}\otimes u$ pour tout $u\in \mathrm{End}(\underline{1})$.

2) Dans la démonstration ci-dessus, on utilise seulement l'hypothèse que $\underline{1}$ soit régulier et $\underline{1}\simeq \underline{1}\otimes\underline{1}$. Donc la proposition reste valable pour tout objet régulier $Z$ tel que $Z\simeq Z\otimes Z$.

Nous allons maintenant définir deux homomorphismes $\gamma, \delta$ du monoïde End $(\underline{1})$ dans le monoïde End $(id_{\underline{C}})$ des morphismes fonctoriels du foncteur identique $id_{\underline{C}}$ de $\underline{C}$, qui nous serviront au chapitre III.

<u>Proposition 8</u>. — Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une unité $(\underline{1}, g, d)$. Les applications

$$\gamma_X : \mathrm{End}(\underline{1}) \longrightarrow \mathrm{End}(X) \ , \quad u \longmapsto \gamma_X(u) \qquad , \qquad \delta_X : \mathrm{End}(\underline{1}) \longrightarrow \mathrm{End}(X) \ , \quad u \longmapsto \delta_X(u)$$

définies respectivement par les diagrammes commutatifs

$$(8)\qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\gamma_X(u)"] \arrow[d, "g_X"'] & X \arrow[d, "g_X"] \\ \underline{1}\otimes X \arrow[r, "u\otimes id_X"'] & \underline{1}\otimes X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta_X(u)"] \arrow[d, "d_X"'] & X \arrow[d, "d_X"] \\ X\otimes\underline{1} \arrow[r, "id_X\otimes u"'] & X\otimes\underline{1} \end{tikzcd}$$

sont des homomorphismes transformant l'élément unité en l'élément unité pour tout objet $X$ de $\underline{C}$.

<u>Démonstration</u>.– La vérification est immédiate. En plus, la naturalité de $g$, $d$ donne

$$(9)\qquad \gamma_{\underline{1}}(u) = \delta_{\underline{1}}(u) = u$$

<u>Proposition 9</u>.– $(\gamma_X(u))_{X\in Ob\,\underline{C}}$, $(\delta_X(u))_{X\in Ob\,\underline{C}}$ sont des morphismes fonctoriels du foncteur identique $id_{\underline{C}}$ de $\underline{C}$.

<u>Démonstration</u>.– Considérons les diagrammes

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g_X"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rrr, bend left, "\gamma_X(u)"] \arrow[rrr, phantom, bend left=20, "(\mathrm{IV})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \underline{1}\otimes X \arrow[r, "u\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes f"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1}\otimes X \arrow[d, "id\otimes f"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & X \arrow[l, "g_X"'] \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "g_{X'}"'] \arrow[rrr, bend right, "\gamma_{X'}(u)"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=20, "(\mathrm{V})"] & \underline{1}\otimes X' \arrow[r, "u\otimes id"'] & \underline{1}\otimes X' & X' \arrow[l, "g_{X'}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "d_X"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rrr, bend left, "\delta_X(u)"] \arrow[rrr, phantom, bend left=20, "(\mathrm{IX})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & X\otimes\underline{1} \arrow[r, "id\otimes u"] \arrow[d, "f\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & X\otimes\underline{1} \arrow[d, "f\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & X \arrow[l, "d_X"'] \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "d_{X'}"'] \arrow[rrr, bend right, "\delta_{X'}(u)"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=20, "(\mathrm{X})"] & X'\otimes\underline{1} \arrow[r, "id\otimes u"'] & X'\otimes\underline{1} & X' \arrow[l, "d_{X'}"] \end{tikzcd}$$

où $f$ est une flèche quelconque. Dans ces diagrammes la commutativité des régions (I), (III), (VI), (VIII) est donné par la naturalité de $g$, $d$ ; celle de (II) et (VII) est immédiate en composant les flèches ; infin celle de (IV), (V), (IX), (X) résulte des diagrammes commutatifs (8). On en déduit la commutativité des circuits extérieurs, ce qui montre la fonctorialité de $\gamma_X(u)$ et $\delta_X(u)$.

<u>Proposition 10.</u>– Les applications

$$\gamma : \mathrm{End}(\underline{1}) \longrightarrow \mathrm{End}(id_{\underline{C}}) \qquad \delta : \mathrm{End}(\underline{1}) \longrightarrow \mathrm{End}(id_{\underline{C}})$$

$$u \longmapsto (\gamma_X(u))_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}} \qquad u \longmapsto (\delta_X(u))_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}}$$

sont des homomorphismes ~~transformant l'élément unité en l'élément unité~~ de monoïdes

<u>Démonstration.</u>– Résultat immédiat des propositions 8 et 9.

<u>Exemple.</u>– Dans l'exemple 5 du (§1, n° 2), la donnée d'une unité revient à celle d'un couple $(l, r)$ de fonctions $M \to N$ vérifiant la relation $l(1) = r(1)$. Dans les diagrammes (8), si on remplace $X$ par $S$, on trouve

$$\gamma_S(u) = (S, u) \quad , \quad \delta_S(u) = (S, Su)$$

ce qui montre que $\gamma \neq \delta$ en général. Cet exemple montre qu'une $\otimes$-catégorie peut avoir plusieurs unités.

<u>Définition 10.</u>– Soient $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ des unités pour la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. On appelle <u>morphisme</u> de $(\underline{1}, g, d)$ dans $(\underline{1}', g', d')$ un morphisme $\lambda : \underline{1} \to \underline{1}'$ rendant commutatifs les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} & \underline{1} \otimes X \arrow[d, "\lambda \otimes id"] \\ X \arrow[ur, "g_X"] \arrow[r, "g'_X"'] & \underline{1}' \otimes X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \otimes \underline{1} \arrow[d, "id \otimes \lambda"] \\ X \arrow[ur, "d_X"] \arrow[r, "d'_X"'] & X \otimes \underline{1}' \end{tikzcd}$$

pour tout objet $X$ de $\underline{C}$. En faisant $X = \underline{1}$, on voit que $\lambda$ est un isomorphisme, et que pour $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ donnés, il y a au plus un tel $\lambda$.

il y en a 1 et 1 seul ?

## §3. Compatibilités entre contraintes.

### 1. Associativité et commutativité.

Définition 1.— Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une contrainte d'associativité $a$ et une contrainte de commutativité $c$ pour $\underline{C}$ sont compatibles si pour des objets $X, Y, Z$ de $\underline{C}$, le diagramme suivant est commutatif. (axiome de l'hexagone)

$$\begin{tikzcd}
 & (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[r, "c_{X\otimes Y, Z}"] & Z\otimes(X\otimes Y) \arrow[dr, "a_{Z,X,Y}"] & \\
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[ur, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "id_X \otimes c_{Y,Z}"'] & & & (Z\otimes X)\otimes Y \\
 & X\otimes(Z\otimes Y) \arrow[r, "a_{X,Z,Y}"'] & (X\otimes Z)\otimes Y \arrow[ur, "c_{X,Z}\otimes id_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

Un couple $(a, c)$ vérifiant l'axiome de l'hexagone est appelé une contrainte mixte d'associativité - commutativité, ou plus simplement une contrainte AC pour la catégorie $\underline{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC est appelée une $\otimes$-catégorie AC. Elle est dite stricte si $c$ l'est (§2, n° 2, Déf. 8).

Définition 2.— Deux contraintes AC $(a, c)$ et $(a', c')$ pour une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ sont dites cohomologues s'il existe un automorphisme fonctoriel $\varphi$ du foncteur $\otimes : \underline{C} \times \underline{C} \to \underline{C}$ tel que les diagrammes (1) du (§2, n°1) et (5) du (§2, n°2) soient commutatifs.

Ici, pour avoir une proposition analogue à (§2, n°1, Prop. 5), nous allons reprendre les notions de produit et produit canonique d'une famille d'objets de $\underline{C}$ $(X_i)_{i\in I}$ relativement à un ordre donné dans $I$. Comme nous possédons maintenant, en plus de la contrainte d'associativité, la contrainte de commutativité, nous allons donc introduire la notion de produit d'une famille $(X_i)_{i\in I}$. Dans ce qui suit de ce n°, on considère une famille d'objets $(X_i)_{i\in J}$ d'une $\otimes$-catégorie AC $\underline{C}$, indexée par un ensemble non vide totalement ordonné $(J, <)$. Les ensembles $I \subset J$ considérés sont supposés finis, non vides. On appelle ordre canonique de $I$ l'ordre induit. Donc si

$I$ possède $p$ éléments, $I$ a $p!-1$ ordres autres que l'ordre canonique.

<u>Définition 3.</u>— Un <u>produit</u> de $(X_i)_{i\in I}$ est le produit de $(X_i)_{i\in I}$ relativement à un ordre quelconque de $I$

<u>Exemple.</u>— Soit $I = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ avec l'ordre canonique $\alpha<\beta<\gamma$. En dehors de cet ordre, $I$ possède cinq autres ordres. Donc on a 12 produits de $(X_i)_{i\in I}$ qui sont

$$\begin{array}{ccc}
(X_\alpha \otimes X_\beta)\otimes X_\gamma & (X_\beta \otimes X_\gamma)\otimes X_\alpha & (X_\gamma \otimes X_\alpha)\otimes X_\beta \\
(X_\beta \otimes X_\alpha)\otimes X_\gamma & (X_\gamma \otimes X_\beta)\otimes X_\alpha & (X_\alpha \otimes X_\gamma)\otimes X_\beta \\
X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes X_\gamma) & X_\beta \otimes (X_\gamma \otimes X_\alpha) & X_\gamma \otimes (X_\alpha \otimes X_\beta) \\
X_\beta \otimes (X_\alpha \otimes X_\gamma) & X_\gamma \otimes (X_\beta \otimes X_\alpha) & X_\alpha \otimes (X_\gamma \otimes X_\beta)
\end{array}$$

Nous notons toujours par $\bigotimes_I X_i$ le produit canonique de $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre canonique.

<u>Définition 4.</u>— Pour chaque couple $(I_1, I_2)$ de sous-ensembles non vides de $I$ tels que $I = I_1 \amalg I_2$, définissons un isomorphisme fonctoriel en les $X_i$, $i\in I$

$$\bigotimes_I X_i \xrightarrow[\sim]{\psi_{I_1,I_2}} (\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i)$$

par récurrence sur le nombre d'éléments de $I$. Notons $\beta$ le plus grand élément de $I$.

1° $I = \{\alpha, \beta\}$.

<u>1er cas</u> $\beta\in I_2$, alors

(1) $$\psi_{I_1,I_2} : \bigotimes_I X_i = X_\alpha \otimes X_\beta$$

est l'identité.

<u>2e cas</u> $\beta \in I_1$, alors

(2) $$\psi_{I_1,I_2} = c_{X_\alpha, X_\beta} : \bigotimes_I X_i = X_\alpha\otimes X_\beta \longrightarrow (\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i) = X_\beta\otimes X_\alpha$$

est la contrainte de commutativité $c_{X_\alpha, X_\beta}$.

2° $I$ a $p > 2$ éléments

__1er cas__ $\beta \in I_2$

a) $I_2 = \{\beta\}$, alors

(3) $$\Psi_{I_1, I_2} : \underset{I}{\otimes} X_i = (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta$$

est l'identité.

b) $I_2$ a plus d'un élément, alors $\Psi_{I_1, I_2}$ est défini par le diagramme commutatif suivant

(4) $$\begin{tikzcd} \underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i) \arrow[r, equal] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes ((\underset{I'_2}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[d, "a"] \\ \underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, equal] & (\underset{I_1 \amalg I'_2}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta \arrow[r, "\Psi_{I_1, I'_2} \otimes id"] & ((\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I'_2}{\otimes} X_i)) \otimes X_\beta \end{tikzcd}$$

où $I'_2$ est l'ensemble des éléments $< \beta$ de $I_2$.

__2e cas__ $\beta \in I_1$

a) $I_1 = \{\beta\}$, alors

(5) $$\Psi_{I_1, I_2} = c_{\underset{I_2}{\otimes} X_i, X_\beta} : \underset{I}{\otimes} X_i = (\underset{I_2}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta \longrightarrow X_\beta \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i) = (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i)$$

est la contrainte de commutativité $c_{\underset{I_2}{\otimes} X_i, X_\beta}$.

b) $I_1$ a plus d'un élément, alors $\Psi_{I_1, I_2}$ est défini par le diagramme commutatif suivant

(6) $$\begin{tikzcd} \underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,I_2}"] \arrow[dddd, equal] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i) \arrow[r, equal] & ((\underset{I'_1}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i) \\ & & (\underset{I'_1}{\otimes} X_i) \otimes (X_\beta \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i)) \arrow[u, "a"] \arrow[d, "id \otimes c"] \\ & & (\underset{I'_1}{\otimes} X_i) \otimes ((\underset{I_2}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[d, "a"] \\ & & \\ \underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, equal] & (\underset{I'_1 \amalg I_2}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta \arrow[r, "\Psi_{I'_1, I_2} \otimes id"] & ((\underset{I'_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i)) \otimes X_\beta \end{tikzcd}$$

où $I'_1$ est l'ensemble des éléments $< \beta$ de $I_1$.

<u>Proposition 1</u>.– Pour chaque couple $(I_1, I_2)$ de sous-ensembles non vides de $I$ tels qu'on ait $I = I_1 \amalg I_2$, le diagramme suivant est commutatif

$$(7)\qquad \begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[d, "c"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2,I_1}"] & (\bigotimes_{I_2} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_1} X_i)
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.– En vertu de la symétrie de $I_1, I_2$ dans (7) on peut toujours supposer le plus grand élément $\beta$ de $I$ appartenant à $I_1$ pour fixer les idées. Pour démontrer la commutativité de (7) nous allons raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments de $I$. D'abord remarquons que pour $I_1 = \{\beta\}$, le diagramme (7) devient

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i = (\bigotimes_{I_2} X_i)\otimes X_\beta \arrow[r, "c"] \arrow[d, equal] & X_\beta \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[d, "c"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, equal] & (\bigotimes_{I_2} X_i)\otimes X_\beta
\end{tikzcd}$$

compte tenu des relations (3) et (5). Ce diagramme est évidemment commutatif, en particulier pour $I = \{\alpha, \beta\}$.

Supposons la commutativité de (7) pour les ensembles $I$ ayant $p-1 \geq 2$ éléments, nous allons la montrer pour les ensembles $I$ ayant $p$ élément. Pour cela considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I'_1\amalg I_2} X_i)\otimes X_\beta \arrow[r, "\Psi_{I_2,I'_1}\otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{I})"] & ((\bigotimes_{I_2} X_i)\otimes(\bigotimes_{I'_1} X_i))\otimes X_\beta \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, phantom, "="] \arrow[ddd, equal] & (\bigotimes_{I'_1\amalg I_2} X_i)\otimes X_\beta \arrow[r, "\Psi_{I'_1,I_2}\otimes id"] & ((\bigotimes_{I'_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i))\otimes X_\beta \arrow[u, "c\otimes id"'] \\
 & & (\bigotimes_{I'_1} X_i)\otimes((\bigotimes_{I_2} X_i)\otimes X_\beta) \arrow[u, "a"'] \\
 & (\mathrm{II}) & (\bigotimes_{I'_1} X_i)\otimes(X_\beta\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i)) \arrow[u, "id\otimes c"'] \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & ((\bigotimes_{I'_1} X_i)\otimes X_\beta)\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[d, "c"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2,I_1}"] & (\bigotimes_{I_2} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_1} X_i) \arrow[r, phantom, "="] & (\bigotimes_{I_2} X_i)\otimes((\bigotimes_{I'_1} X_i)\otimes X_\beta) \arrow[uuuuu, bend right, "a"', "(\mathrm{IV})"]
\end{tikzcd}$$

où $I_1'$ est l'ensemble des éléments $< \beta$ de $I_1$. Dans ce diagramme la région (I) est commutative par hypothèse de récurrence ; (II) par définition de $\Psi_{I_1,I_2}$ (diag. (6)) ; (IV) par l'axiome de l'hexagone ; et enfin le circuit extérieur par définition de $\Psi_{I_2,I_1}$ (diag (4)). On en déduit la commutativité de (III), d'où l'assertion.

Pour chaque triple $(I_1, I_2, I_3)$ de sous-ensembles non vides de $I$ tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$ nous allons considérer les diagrammes suivants.

(8)
$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2 \amalg I_3} X_i) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_2, I_3}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \amalg I_2, I_3}"] & (\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)
\end{tikzcd}$$

(9)
$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2, I_1 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1 \amalg I_3} X_i) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_1, I_3}"] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2 \amalg I_1, I_3}"] & (\bigotimes_{I_2 \amalg I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_2, I_1} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)
\end{tikzcd}$$

(10)
$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_3 \amalg I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3 \amalg I_2} X_i) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_3, I_2}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_3} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \amalg I_3, I_2}"] & (\bigotimes_{I_1 \amalg I_3} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_3} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)
\end{tikzcd}$$

(11)
$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_3, I_1 \amalg I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_3} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_1, I_2}"] & (\bigotimes_{I_3} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_3 \amalg I_1, I_2}"] & (\bigotimes_{I_3 \amalg I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_3, I_1} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_3} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)
\end{tikzcd}$$

$$
(12)\qquad
\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2,\, I_3 \amalg I_1}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3 \amalg I_1} X_i) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_3, I_1}"] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_3} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2 \amalg I_3,\, I_1}"] & (\bigotimes_{I_2 \amalg I_3} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_2, I_3} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i)
\end{tikzcd}
$$

$$
(13)\qquad
\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_3,\, I_2 \amalg I_1}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_3} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2 \amalg I_1} X_i) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_2, I_1}"] & (\bigotimes_{I_3} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_3 \amalg I_2,\, I_1}"] & (\bigotimes_{I_3 \amalg I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_3, I_2} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_3} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i)
\end{tikzcd}
$$

Lemme. — Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) les diagrammes (8) et (9) sont commutatifs.

b) les diagrammes (10) et (11) sont commutatifs.

c) les diagrammes (12) et (13) sont commutatifs.

Démonstration. — a) $\Rightarrow$ b). Considérons le diagramme suivant

$$
(14)\qquad
\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,\, I_3 \amalg I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3 \amalg I_2} X_i) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_3, I_2}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_3} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \arrow[d, "a"] \arrow[ddddd, bend left=60, "id \otimes c"] \arrow[ddddd, phantom, bend left=30, "\mathrm{VIII}"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \amalg I_3,\, I_2}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & (\bigotimes_{I_1 \amalg I_3} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_3} \otimes id"] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[d, "c"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2,\, I_1 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1 \amalg I_3} X_i) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_1, I_3}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IV}"] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2 \amalg I_1,\, I_3}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{V}"] & (\bigotimes_{I_2 \amalg I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_2, I_1} \otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VI}"] & ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \amalg I_2,\, I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2} \otimes id"] \arrow[u, "id \otimes id"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{VII}"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[u, "c \otimes id"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,\, I_2 \amalg I_3}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2 \amalg I_3} X_i) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_2, I_3}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[u, "a"]
\end{tikzcd}
$$

où la commutativité des régions (II), (VI) et du contour extérieur découle de la proposition 1 ; celle de (III) vient de la naturalité de $c$ ; celle de (IV), (VII) est donnée par l'hypothèse ; celle de (V) est évidente ; enfin celle de (VIII) résulte de l'axiome de l'hexagone. D'où la commutativité de la région (I) qui est le diagramme (10). Dans le diagramme (14), si on remplace $I_2$ par $I_3$ et $I_3$ par $I_2$, on obtient la commutativité de (11).

b) $\Rightarrow$ c). Il suffit de remplacer dans (14) $I_1, I_2, I_3$ respectivement par $I_3, I_1, I_2$, puis par $I_3, I_2, I_1$.

c) $\Rightarrow$ a). On remplace dans (14) $I_1, I_2, I_3$ respectivement par $I_2, I_3, I_1$, puis par $I_2, I_1, I_3$.

<u>Proposition 2</u>.— Pour chaque triple $(I_1, I_2, I_3)$ de sous-ensembles non vides de $I$ tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$, le diagramme (8) est commutatif.

<u>Démonstration</u>.— Soit $\beta$ le plus grand élément de $I$. D'après le lemme précédent, pour démontrer la commutativité de (8), on peut toujours supposer $\beta \in I_3$. D'abord remarquons que pour $I_3 = \{\beta\}$ le diagramme (8) devient

$$\begin{array}{ccc}
\bigotimes_I X_i & \xrightarrow{\Psi_{I_1, I_2 \amalg \{\beta\}}} & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2 \amalg \{\beta\}} X_i) = (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes X_\beta) \\
\| & & \downarrow a \\
\bigotimes_I X_i = (\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes X_\beta & \xrightarrow{\Psi_{I_1, I_2} \otimes id} & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes X_\beta
\end{array}$$

Ce diagramme est commutatif par définition de $\Psi$ (diag. (4)) pour tout $I$ non vide, en particulier pour $I$ se composant de trois éléments. Nous allons démontrer la proposition par récurrence sur le nombre d'éléments de $I$. L'assertion est vraie pour les ensembles $I$ ayant trois éléments. Supposons la commutativité de (8) pour les ensembles $I$ ayant $p-1 \geq 3$ éléments, nous allons la démontrer pour les ensembles $I$ ayant $p$ éléments. Cela revient à prouver la commutativité de la région (IV) du diagramme suivant où $I'_3$ désigne l'ensemble des éléments $< \beta$ de $I_3$ ($I_3$ est supposé évidemment avoir plus d'un élément):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "{\psi_{I_1, I_2 \amalg I'_3} \otimes id}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \Big(\big(\bigotimes_{I_1} X_i\big) \otimes \big(\bigotimes_{I_2 \amalg I'_3} X_i\big)\Big) \otimes X_\beta \arrow[r, "{(id \otimes \psi_{I_2, I'_3}) \otimes id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \Big(\big(\bigotimes_{I_1} X_i\big) \otimes \Big(\big(\bigotimes_{I_2} X_i\big) \otimes \big(\bigotimes_{I'_3} X_i\big)\Big)\Big) \otimes X_\beta \arrow[dddd, bend left=60, "a \otimes id"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "{\psi_{I_1, I_2 \amalg I_3}}"] \arrow[d, equal] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{III})"] & \big(\bigotimes_{I_1} X_i\big) \otimes \Big(\big(\bigotimes_{I_2 \amalg I'_3} X_i\big) \otimes X_\beta\Big) \arrow[u, "a"'] \arrow[r, "{id \otimes (\psi_{I_2, I'_3} \otimes id)}"] & \big(\bigotimes_{I_1} X_i\big) \otimes \Big(\Big(\big(\bigotimes_{I_2} X_i\big) \otimes \big(\bigotimes_{I'_3} X_i\big)\Big) \otimes X_\beta\Big) \arrow[u, "a"'] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{VII})" right] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "{\psi_{I_1, I_2 \amalg I_3}}"] \arrow[d, equal] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \big(\bigotimes_{I_1} X_i\big) \otimes \Big(\big(\bigotimes_{I_2 \amalg I'_3} X_i\big) \otimes X_\beta\Big) \arrow[r, "{id \otimes \psi_{I_2, I_3}}"] & \big(\bigotimes_{I_1} X_i\big) \otimes \Big(\big(\bigotimes_{I_2} X_i\big) \otimes \Big(\big(\bigotimes_{I'_3} X_i\big) \otimes X_\beta\Big)\Big) \arrow[u, "id \otimes a"'] \arrow[d, "a"'] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "{\psi_{I_1 \amalg I_2, I_3}}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & \big(\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i\big) \otimes \Big(\big(\bigotimes_{I'_3} X_i\big) \otimes X_\beta\Big) \arrow[r, "{\psi_{I_1, I_2} \otimes id}"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & \Big(\big(\bigotimes_{I_1} X_i\big) \otimes \big(\bigotimes_{I_2} X_i\big)\Big) \otimes \Big(\big(\bigotimes_{I'_3} X_i\big) \otimes X_\beta\Big) \arrow[d, "a"'] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "{\psi_{I_1 \amalg I_2, I'_3} \otimes id}"] & \Big(\big(\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i\big) \otimes \big(\bigotimes_{I'_3} X_i\big)\Big) \otimes X_\beta \arrow[r, "{(\psi_{I_1, I_2} \otimes id) \otimes id}"] & \Big(\Big(\big(\bigotimes_{I_1} X_i\big) \otimes \big(\bigotimes_{I_2} X_i\big)\Big) \otimes \big(\bigotimes_{I'_3} X_i\big)\Big) \otimes X_\beta
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme la commutativité des régions (I), (III), (V) résulte de la définition de $\psi$ (diag. (4)) ; celle de (II), (VI) résulte de la naturalité de $a$ ; celle de (VII) résulte de l'axiome du pentagone ; enfin celle du circuit extérieur est donnée par l'hypothèse de récurrence. D'où la commutativité de (IV).

<u>Proposition 3.</u>- Chaque produit $Y$ d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ est isomorphe au produit canonique $\bigotimes_I X_i$ relativement à l'ordre canonique par un isomorphisme

$$y : \bigotimes_I X_i \xrightarrow{\sim} Y \quad ;$$

fonctoriel en les $X_i$.

<u>Démonstration.</u>- Nous allons construire $y$ par récurrence sur le nombre d'éléments de $I$. Pour $I = \{\beta\}$ l'isomorphisme est l'identité $X_\beta = X_\beta$. Pour $I$ ayant $p > 1$ éléments, en remarquant que $Y$ doit être de la forme $Y = Z \otimes T$, $Z$ et $T$ étant des produits de $(X_i)_{i \in I_1}$, $(X_i)_{i \in I_2}$ respectivement avec $I = I_1 \amalg I_2$, l'isomorphisme $y$ est défini comme le composé des isomorphismes

$$\bigotimes_I X_i \xrightarrow{\psi_{I_1,I_2}} (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \xrightarrow{z \otimes t} Z \otimes T$$

où $z$ et $t$ sont des isomorphismes donnés par l'hypothèse de récurrence. L'isomorphisme $y$ construit comme ci-dessus est appelé <u>l'isomorphisme canonique</u>.

Nous allons maintenant énoncer des propositions dont la démonstration est analogue à celle dans (§2, n°1, Prop. 3, 4 et 5)

<u>Proposition 4</u>.– Soient $I_1, I_2, I_3$ des sous-ensembles non vides de $I$ tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$ ; et soient $Y, Z, T$ des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$, $(X_i)_{i\in I_3}$ respectivement. Alors le diagramme suivant est commutatif, $b$ et $b'$ étant les isomorphismes canoniques définis dans la prop. 3

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_I X_i & \xrightarrow{b} & Y \otimes (Z \otimes T) \\ \| & & \downarrow a \\ \bigotimes_I X_i & \xrightarrow{b'} & (Y \otimes Z) \otimes T \end{array}$$

<u>Proposition 5</u>.– Soient $I_1, I_2$ des sous-ensembles non vides de $I$, tels que $I = I_1 \amalg I_2$ ; et soient $Y, Z$ des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_I X_i & \xrightarrow{f} & Y \otimes Z \\ \| & & \downarrow c \\ \bigotimes_I X_i & \xrightarrow{f'} & Z \otimes Y \end{array}$$

est commutatif, $f$ et $f'$ étant les isomorphismes canoniques.

<u>Proposition 6</u>.– Soient $Y_1, Y_2$ des produits de $(X_i)_{i\in I}$ et $\mu : Y_1 \to Y_2$ un isomorphisme construit à l'aide de $a, a^{-1}, c, c^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$ ; alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_I X_i & \xrightarrow{b_1} & Y_1 \\ \| & & \downarrow \mu \\ \bigotimes_I X_i & \xrightarrow{b_2} & Y_2 \end{array}$$

où $b_1, b_2$ sont les isomorphismes canoniques, est commutatif.

<u>Proposition 7</u>.– Soient $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ des produits des $(X_i)_{i \in I}$, $\mu_{i,i+1} : Y_i \xrightarrow{\sim} Y_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ et $\mu_{n1} : Y_n \xrightarrow{\sim} Y_1$ des isomorphismes construit au moyen de $a$, $a^{-1}$, $c$, $c^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$ ; alors le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[dr] & \\
Y_n \arrow[ur] & & & Y_3 \arrow[d] \\
\cdot \arrow[u] & & & \cdot \arrow[dl] \\
 & \cdot \arrow[ul] & \cdot \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

<u>Exemple</u>.– le polygone suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
(X_1 \otimes X_2) \otimes (X_3 \otimes (X_4 \otimes X_5)) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "id \otimes c"'] & (X_3 \otimes (X_4 \otimes X_5)) \otimes (X_1 \otimes X_2) \arrow[d, "c \otimes id"] \\
(X_1 \otimes X_2) \otimes ((X_4 \otimes X_5) \otimes X_3) \arrow[d, "a"'] & ((X_4 \otimes X_5) \otimes X_3) \otimes (X_1 \otimes X_2) \arrow[d, "a^{-1}"] \\
((X_1 \otimes X_2) \otimes (X_4 \otimes X_5)) \otimes X_3 \arrow[d, "c \otimes id"'] & (X_4 \otimes X_5) \otimes (X_3 \otimes (X_1 \otimes X_2)) \arrow[d, "id \otimes c"] \\
((X_4 \otimes X_5) \otimes (X_1 \otimes X_2)) \otimes X_3 \arrow[r, "a^{-1}"] & (X_4 \otimes X_5) \otimes ((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3)
\end{tikzcd}$$

<u>Remarque</u>.– Supposons $X_1 = X_4 = X$ et $X_2 = X_5 = Y$ dans le polygone ci-dessus. Alors si on remplace la flèche $c_{X \otimes Y} \otimes id$ par l'identité $id_{X \otimes Y} \otimes id_{X_3}$, alors le polygone n'est plus commutatif sauf dans le cas où la catégorie $\underline{C}$ est stricte. Donc quand on est dans une $\otimes$-catégorie AC non stricte et on a affaire avec un polygone du genre dans l'exemple, dont les sommets sont des produits d'objets non différents, il nous faut penser à les numéroter pour ne pas faire gaffe.

2. Associativité et unité.

Définition 5.– Soit $\underline{C}$ une ⊗-catégorie. On dit qu'une contrainte d'associativité a et une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$ pour $\underline{C}$ sont compatibles, si pour tout couple d'objets $(X, Y)$ de $\underline{C}$ les triangles suivants

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \underline{1}\otimes(X\otimes Y) \arrow[rr, "a"] & & (\underline{1}\otimes X)\otimes Y \\ & X\otimes Y \arrow[ul, "g_{X\otimes Y}"] \arrow[ur, "g_X\otimes id_Y"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] X\otimes(\underline{1}\otimes Y) \arrow[rr, "a"] & & (X\otimes \underline{1})\otimes Y \\ & X\otimes Y \arrow[ul, "id_X\otimes g_Y"] \arrow[ur, "d_X\otimes id_Y"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] X\otimes(Y\otimes \underline{1}) \arrow[rr, "a"] & & (X\otimes Y)\otimes \underline{1} \\ & X\otimes Y \arrow[ul, "id_X\otimes d_Y"] \arrow[ur, "d_{X\otimes Y}"'] & \end{tikzcd}$$

(15) (16) (17)

sont commutatifs.

Un couple comme ci-dessus est appelé une contrainte mixte d'associativité-unité, ou plus simplement une contrainte AU pour la ⊗-catégorie $\underline{C}$. Une ⊗-catégorie munie d'une contrainte AU est appelée une ⊗-catégorie AU.

Nous allons voir que ces conditions de compatibilité sont surabondantes.

Proposition 8.– Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) (16) est commutatif.

b) (15) et (17) sont commutatifs.

c) Les diagrammes suivants sont commutatifs pour tout $X$ de $\underline{C}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes X) \arrow[rr, "a"] & & (\underline{1}\otimes \underline{1})\otimes X \\ & \underline{1}\otimes X \arrow[ul, "g_{\underline{1}\otimes X}"] \arrow[ur, "g_{\underline{1}}\otimes id_X"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] X\otimes(\underline{1}\otimes \underline{1}) \arrow[rr, "a"] & & (X\otimes \underline{1})\otimes \underline{1} \\ & X\otimes \underline{1} \arrow[ul, "id_X\otimes d_{\underline{1}}"] \arrow[ur, "d_{X\otimes \underline{1}}"'] & \end{tikzcd}$$

(15') (17')

Démonstration.– b) ⟹ c). Evident.

c) ⟹ a). Considérons les diagrammes suivants

$$
(18)\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(X\otimes \mathbf{1})\otimes Y \arrow[r, "(id_X\otimes g_{\mathbf{1}})\otimes id_Y"] & (X\otimes(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}))\otimes Y \arrow[dddd, bend left=70, "a\otimes id_Y"] \\
X\otimes(\mathbf{1}\otimes Y) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "id_X\otimes(g_{\mathbf{1}}\otimes id_Y)"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{I})"] \arrow[d, equal] & X\otimes((\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\otimes Y) \arrow[u, "a"'] \\
X\otimes(\mathbf{1}\otimes Y) \arrow[r, "id_X\otimes g_{\mathbf{1}\otimes Y}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{II})"] \arrow[d, equal] & X\otimes(\mathbf{1}\otimes(\mathbf{1}\otimes Y)) \arrow[u, "id_X\otimes a"'] \arrow[d, "a"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "(\mathrm{V})"] \\
X\otimes(\mathbf{1}\otimes Y) \arrow[r, "d_X\otimes id_{\mathbf{1}\otimes Y}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{III})"] \arrow[d, "a"'] & (X\otimes\mathbf{1})\otimes(\mathbf{1}\otimes Y) \arrow[d, "a"] \\
(X\otimes\mathbf{1})\otimes Y \arrow[r, "(d_X\otimes id_{\mathbf{1}})\otimes id_Y"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{IV})"] & ((X\otimes\mathbf{1})\otimes\mathbf{1})\otimes Y
\end{tikzcd}
$$

$$
(19)\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
X\otimes Y \arrow[r, "id_X\otimes g_Y"] \arrow[d, "id_X\otimes g_Y"'] & X\otimes(\mathbf{1}\otimes Y) \arrow[d, "id_X\otimes g_{\mathbf{1}\otimes Y}"] \arrow[ddd, bend left=70, "a"] \\
X\otimes(\mathbf{1}\otimes Y) \arrow[r, "id_X\otimes g_{\mathbf{1}\otimes Y}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{VI})"] \arrow[d, equal] & X\otimes(\mathbf{1}\otimes(\mathbf{1}\otimes Y)) \arrow[d, "a"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "(\mathrm{IX})"] \\
X\otimes(\mathbf{1}\otimes Y) \arrow[r, "d_X\otimes id_{\mathbf{1}\otimes Y}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{VII})"] & (X\otimes\mathbf{1})\otimes(\mathbf{1}\otimes Y) \\
X\otimes Y \arrow[u, "id_X\otimes g_Y"] \arrow[r, "d_X\otimes id_Y"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & (X\otimes\mathbf{1})\otimes Y \arrow[u, "id_{X\otimes\mathbf{1}}\otimes g_Y"']
\end{tikzcd}
$$

où la commutativité des régions (I),(IV) résulte de la fonctorialité de $a$ et il en est de même de celle de (IX) si on remarque qu'on a $g_{\mathbf{1}\otimes Y} = id_{\mathbf{1}}\otimes g_Y$ (§2, n°3, For. (7)) ; celle de (II) et du circuit extérieur de (18) est donnée par l'hypothèse en tenant compte des relations $g_{\mathbf{1}} = d_{\mathbf{1}}$, $d_X\otimes id_{\mathbf{1}} = d_{X\otimes\mathbf{1}}$ (§2, n°3, For. (6) et (7)) ; celle de (V) résulte de l'axiome du pentagone ; celle de (VI),(VIII) est évidente. On en déduit la commutativité de (III) et par conséquent celle de (VII). D'où la commutativité du circuit extérieur de (19).

a) $\Rightarrow$ b). Considérons les diagrammes ci-dessous dont la commutativité des régions (I), (IV), (VII), (IX) découle de la naturalité de $a$ ; celle de (III), (VIII) et des circuits extérieurs résulte de l'hypothèse ; et enfin celle de (V), (X) vient de l'axiome du pentagone. On en déduit la commutativité de (II) et (VI) et par conséquent celle de (15) et (17) puisque $\underline{1}$ est régulier (§1, n°1, Déf. 2).

$$
\begin{tikzcd}
(\underline{1}\otimes X)\otimes Y \arrow[r, "(id_{\underline{1}}\otimes g_X)\otimes id_Y"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(I)}"] & (\underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes X))\otimes Y \arrow[dddd, bend left=60, "a\otimes id_Y"] \\
\underline{1}\otimes(X\otimes Y) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "id_{\underline{1}}\otimes(g_X\otimes id_Y)"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & \underline{1}\otimes((\underline{1}\otimes X)\otimes Y) \arrow[u, "a"'] \\
\underline{1}\otimes(X\otimes Y) \arrow[r, "id_{\underline{1}}\otimes g_{X\otimes Y}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & \underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes(X\otimes Y)) \arrow[u, "id_{\underline{1}}\otimes a"'] \arrow[d, "a"] \arrow[d, phantom, shift left=8ex, "\mathrm{(V)}"] \\
\underline{1}\otimes(X\otimes Y) \arrow[r, "d_{\underline{1}}\otimes id_{X\otimes Y}"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & (\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes(X\otimes Y) \arrow[d, "a"] \\
(\underline{1}\otimes X)\otimes Y \arrow[r, "(d_{\underline{1}}\otimes id_X)\otimes id_Y"] & ((\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes X)\otimes Y
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(X\otimes Y)\otimes\underline{1} \arrow[r, "d_{X\otimes Y}\otimes id_{\underline{1}}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(VI)}"] & ((X\otimes Y)\otimes\underline{1})\otimes\underline{1} \\
(X\otimes Y)\otimes\underline{1} \arrow[u, equal] \arrow[r, "(id_X\otimes d_Y)\otimes id_{\underline{1}}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(VII)}"] & (X\otimes(Y\otimes\underline{1}))\otimes\underline{1} \arrow[u, "a\otimes id_{\underline{1}}"'] \\
X\otimes(Y\otimes\underline{1}) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "id_X\otimes(d_Y\otimes id_{\underline{1}})"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(VIII)}"] & X\otimes((Y\otimes\underline{1})\otimes\underline{1}) \arrow[u, "a"'] \arrow[u, phantom, shift left=8ex, "\mathrm{(X)}"] \\
X\otimes(Y\otimes\underline{1}) \arrow[r, "id_X\otimes(id_Y\otimes g_{\underline{1}})"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(IX)}"] & X\otimes(Y\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1})) \arrow[u, "id\otimes a"'] \arrow[d, "a"] \\
(X\otimes Y)\otimes\underline{1} \arrow[r, "(id_X\otimes id_Y)\otimes g_{\underline{1}}"] & (X\otimes Y)\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[uuuu, bend right=60, "a"']
\end{tikzcd}
$$

Soit toujours $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie AU avec $(a, (\underline{1}, g, d))$ comme contrainte AU. De façon analogue à (§2, n°1), nous considérons une famille d'objets $(X_i)_{i\in J}$ de $\underline{C}$, indexée par un ensemble totalement ordonné $(J, <)$ et nous supposons qu'il existe des $i \in J$ tels que $X_i = \underline{1}$. Pour chaque ensemble fini $I \subset J$ totalement ordonné par l'ordre induit (ici $I$ peut être l'ensemble vide), nous définissons comme dans (§2 n°1) le produit canonique et les produits de $(X_i)_{i\in I}$ à la seule différence qu'ici on pose

J peut-être $\neq \emptyset$ ?

??

$$\text{(20)} \qquad \bigotimes_{\emptyset} X_i = \underline{1}$$

quand $I$ est l'ensemble vide.

<u>Définition 6.</u>— Pour chaque couple $(I_1, I_2)$ de sous-ensembles de $I$ tels que $I = I_1 \amalg I_2$ et que la relation $i_1 \in I_1$ et $i_2 \in I_2$ implique la relation $i_1 < i_2$, définissons un isomorphisme fonctoriel en les $X_i$, $i \in I$,

$$\bigotimes_I X_i \xrightarrow{\phi_{I_1,I_2}} (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)$$

de la manière suivante :

1° Si $I_1 = \emptyset$, alors

(21) $$\phi_{I_1,I_2} = g_{\bigotimes_I X_i}$$

2° Si $I_2 = \emptyset$, alors

(22) $$\phi_{I_1,I_2} = d_{\bigotimes_I X_i}$$

3° Si $I_2 = \{\beta\}$, alors

(23) $$\phi_{I_1,I_2} = id_{\bigotimes_I X_i}$$

4° Si $I_2$ a $p > 1$ éléments avec $\beta$ le plus grand élément et $I_2'$ l'ensemble des éléments $< \beta$ de $I_2$, alors $\phi_{I_1,I_2}$ est défini par récurrence sur le nombre d'éléments de $I_2$ par le diagramme commutatif suivant

(24) $$\begin{tikzcd} \bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) = (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2'} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[d, "a"] \\ (\bigotimes_{I_1 \amalg I_2'} X_i) \otimes X_\beta \arrow[r, "\phi_{I_1,I_2'} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2'} X_i)) \otimes X_\beta \end{tikzcd}$$

<u>Proposition 9.</u>— Pour chaque triple $(I_1, I_2, I_3)$ de sous-ensembles de $I$ tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$ et que la relation $\alpha \in I_j$, $\alpha' \in I_{j'}$, $(1 \leq j < j' \leq 3)$ implique $\alpha < \alpha'$, le diagramme suivant est commutatif

(25) $$\begin{tikzcd} \bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2 \amalg I_3} X_i) \arrow[r, "id \otimes \phi_{I_2,I_3}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \\ \bigotimes_I X_i \arrow[r, "\phi_{I_1 \amalg I_2, I_3}"] & (\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "\phi_{I_1,I_2} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>. — 1° $I_1, I_2, I_3$ sont différents de l'ensemble vide. Alors on est dans le cas de (§2, n°1, Pr. p.1).

2° $I_1 = \emptyset$. Alors (25) devient le contour extérieur du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "g_{\otimes X_i}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, "\phi_{I_2,I_3}"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "(\mathrm{I})"] & \underline{1} \otimes (\underset{I}{\otimes} X_i) \arrow[r, "id \otimes \phi_{I_2,I_3}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1} \otimes ((\underset{I_2}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_3}{\otimes} X_i)) \arrow[d, "a"] \arrow[d, phantom, shift right=10ex, "(\mathrm{III})"] \\
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\phi_{I_2,I_3}"] & (\underset{I_2}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_3}{\otimes} X_i) \arrow[r, "g_{\underset{I_2}{\otimes} X_i} \otimes id"] \arrow[ur, "g"] & (\underline{1} \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i)) \otimes (\underset{I_3}{\otimes} X_i)
\end{tikzcd}$$

compte tenu de (20) et (21). Dans ce diagramme la commutativité de la région (I) est évidente ; celle de (II) résulte de la naturalité de $g$ ; et enfin celle de (III) vient de la compatibilité de $a$ avec $(1, g, d)$ (diag. ...). D'où la commutativité du circuit extérieur.

3° $I_2 = \emptyset$. Alors (25) est le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\phi_{I_1,I_3}"] \arrow[d, equal] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_3}{\otimes} X_i) \arrow[r, "id \otimes g_{\underset{I_3}{\otimes} X_i}"] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underline{1} \otimes (\underset{I_3}{\otimes} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\phi_{I_1,I_3}"] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_3}{\otimes} X_i) \arrow[r, "d_{\underset{I_1}{\otimes} X_i} \otimes id"] & ((\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes \underline{1}) \otimes (\underset{I_3}{\otimes} X_i)
\end{tikzcd}$$

compte tenu de (20), (21), (22). Ici la commutativité est évidente en vertu de (16).

4° $I_3 = \emptyset$. Alors (25) est le circuit extérieur du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\phi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, "d_{\underset{I}{\otimes} X_i}"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "(\mathrm{I})"] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i) \arrow[r, "id \otimes d_{\underset{I_2}{\otimes} X_i}"] \arrow[dr, "d_{(\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i)}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes ((\underset{I_2}{\otimes} X_i) \otimes \underline{1}) \arrow[d, "a"] \arrow[d, phantom, shift right=10ex, "(\mathrm{III})"] \\
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "d_{\underset{I_1 \sqcup I_2}{\otimes} X_i}"] & (\underset{I_1 \sqcup I_2}{\otimes} X_i) \otimes \underline{1} \arrow[r, "\phi_{I_1,I_2} \otimes id"] & ((\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i)) \otimes \underline{1}
\end{tikzcd}$$

compte tenu de (20), (22). Dans ce diagramme la commutativité de la région (I) est évidente ; celle de (II) découle de la fonctorialité de $d$ ; et enfin celle de (III) résulte de la compatibilité de $a$ avec $(1, g, d)$ (diag. (17)). D'où la commutativité du circuit extérieur.

<u>Proposition 10.</u>– Pour toute famille $(X_i)_{i\in I}$, les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \underset{I}{\otimes} X_i & = & \underset{I}{\otimes} X_i \\ \| & & \downarrow g_{\underset{I}{\otimes} X_i} \\ \underset{I}{\otimes} X_i & \xrightarrow{\phi_{\phi,I}} (\underset{\phi}{\otimes} X_i)\otimes(\underset{I}{\otimes} X_i) = & \underline{1}\otimes(\underset{I}{\otimes} X_i) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \underset{I}{\otimes} X_i & = & \underset{I}{\otimes} X_i \\ \| & & \downarrow d_{\underset{I}{\otimes} X_i} \\ \underset{I}{\otimes} X_i & \xrightarrow{\phi_{I,\phi}} (\underset{I}{\otimes} X_i)\otimes(\underset{\phi}{\otimes} X_i) = & (\underset{I}{\otimes} X_i)\otimes\underline{1} \end{array}$$

<u>Démonstration.</u>– On a la commutativité de ces diagrammes en vertu de (20), (21), (22).

<u>Proposition 11.</u>– Chaque produit $Y$ d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ est isomorphe au produit canonique $\underset{I'}{\otimes} X_i$ par un isomorphisme

$$y : \underset{I'}{\otimes} X_i \xrightarrow{\sim} Y$$

fonctoriel en les $X_i$, $i \in I'$, $I'$ étant le sous-ensemble de $I$ se composant des éléments $i \in I$ tels que $X_i \neq \underline{1}$.

<u>Démonstration.</u>– 1° Pour $I = \{\beta\}$ ; on a $I' = I$ pour $X_\beta \neq \underline{1}$ et $I' = \phi$ pour $X_\beta = \underline{1}$. Dans les deux cas on pose

$$y = id_{X_\beta}$$

2° Pour $I$ ayant $p > 1$ éléments, en remarquant que $Y$ doit être de la forme $Y = Z\otimes T$, $Z$ et $T$ étant des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement avec $I = I_1 \amalg I_2$ et $i_1 < i_2$ pour $i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2$, on on définit l'isomorphisme $y$ comme le composé des isomorphismes

$$\underset{I'}{\otimes} X_i \xrightarrow{\phi_{I'_1,I'_2}} (\underset{I'_1}{\otimes} X_i)\otimes(\underset{I'_2}{\otimes} X_i) \xrightarrow{z\otimes t} Z\otimes T = Y$$

$z$ et $t$ étant les isomorphismes définis par l'hypothèse de récurrence.

3° Pour $I = \phi$, on a $Y = \underline{1}$ et $\underset{I'}{\otimes} X_i = \underline{1}$. Dans ce cas on pose

$$y = id_{\underline{1}}$$

L'isomorphisme $y$ construit comme ci-dessus est appelé <u>l'isomorphisme canonique</u>.

Ici nous avons aussi les propositions dont la démonstration est comme celle dans ( §2, n°1).

Proposition 12.– Soient $I_1$, $I_2$, $I_3$ des sous-ensembles non vides de $I$ tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$ et $i_1 < i_2 < i_3$ pour $i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2$, $i_3 \in I_3$ ; et soient $Y, Z, T$ des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$, $(X_i)_{i\in I_3}$ respectivement. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underset{I'}{\otimes} X_i & \xrightarrow{b} & Y \otimes (Z \otimes T) \\ \| & & \downarrow a \\ \underset{I'}{\otimes} X_i & \xrightarrow{b'} & (Y \otimes Z) \otimes T \end{array}$$

est commutatif ; $b$ et $b'$ étant les isomorphismes canoniques et $I'$ l'ensemble des éléments $i$ de $I$ tels que $X_i \neq \underline{1}$.

Proposition 13.– Soit $Y$ un produit d'une famille non vide $(X_i)_{i\in I}$, les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \underset{I'}{\otimes} X_i & \xrightarrow{y} & Y \\ \| & & \downarrow g_Y \\ \underset{I'}{\otimes} X_i & \xrightarrow{y'} & \underline{1} \otimes Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \underset{I'}{\otimes} X_i & \xrightarrow{y'} & Y \\ \| & & \downarrow d_Y \\ \underset{I'}{\otimes} X_i & \xrightarrow{y''} & Y \otimes \underline{1} \end{array}$$

$y, y', y''$ étant les isomorphismes canoniques ; $I'$ l'ensemble des éléments $i$ de $I$ tels que $X_i \neq \underline{1}$.

Proposition 14.– Soient $Y_1, Y_2$ des produits des familles non vides $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement où $I_1 \subset I_2$ et $X_i = \underline{1}$ pour $i \in I_2 - I_1$. Soit $v : Y_1 \xrightarrow{\sim} Y_2$ un isomorphisme construit à l'aide de $a, a^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}$, des identités ~~et~~ de la loi $\otimes$. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underset{I'_1}{\otimes} X_i & \xrightarrow{y_1} & Y_1 \\ \| & & \downarrow v \\ \underset{I'_2}{\otimes} X_i & \xrightarrow{y_2} & Y_2 \end{array}$$

est commutatif ; $y_1, y_2$ étant les isomorphismes canoniques ; $I'_1$ l'ensemble des $i \in I_1$ tels que $X_i \neq \underline{1}$.

Proposition 15.– Soient $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ des produits des familles non vides $(X_i)_{i\in I_1}, (X_i)_{i\in I_2}, \dots (X_i)_{i\in I_n}$ respectivement et tels que

$$\bigotimes_{I} X_i \xrightarrow[\sim]{y_j} Y_j \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

$I$ étant l'ensemble des $i \in I_j$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$, ce qui veut dire que l'ensemble des $i \in I_j$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$ est le même pour $j = 1, 2, \dots, n$ ; et $y_j$ l'isomorphisme canonique. Soient $v_{i,i+1} : Y_i \xrightarrow{\sim} Y_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ et $v_{n1} : Y_n \xrightarrow{\sim} Y_1$ des isomorphismes construits au moyen de $a, a^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$. Alors le polygone suivant

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1 \arrow[r, "v_{12}"] & Y_2 \arrow[dr, "v_{23}"] & \\
Y_n \arrow[ur, "v_{n1}"] & & & Y_3 \arrow[d] \\
\cdot \arrow[u] & & & \cdot \arrow[dl] \\
 & \cdot \arrow[ul] & \cdot \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

<u>Exemples</u>. — 1) le polygone suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & (X\otimes\underline{1})\otimes(\underline{1}\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "id\otimes g^{-1}_{Y\otimes Z}"] & \\
((X\otimes\underline{1})\otimes\underline{1})\otimes(Y\otimes Z) \arrow[d, "(d_X\otimes id)\otimes id"'] & & (X\otimes 1)\otimes(Y\otimes Z) \arrow[d, "a^{-1}"] \\
(X\otimes\underline{1})\otimes(Y\otimes Z) \arrow[dr, "d_X\otimes id"'] & & X\otimes(\underline{1}\otimes(Y\otimes Z)). \\
 & X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[ur, "id\otimes g_{Y\otimes Z}"'] &
\end{tikzcd}$$

2) Reprenons l'exemple 5) du (§1, n°2). Se donner une contrainte d'associativité $a$ et une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$ dans ce cas revient à se donner respectivement un 3-cocycle $f$ de $M$ à valeurs dans le $M$-module $N$ (§2, n°1, Ex.) et un couple $(l, r)$ de fonctions $M \to N$ vérifiant $l(1) = r(1)$ (§2, n°3, Ex.), les relations entre $a$ et $f$, $(g, d)$ et $(l, r)$ étant :

$$a_{s_1, s_2, s_3} = (s_1 s_2 s_3, f(s_1, s_2, s_3))$$

$$g_s = (s, \ell(s))$$

$$d_s = (s, r(s))$$

Nous supposons ici, pour simplifier le problème, que $f$ est un 3-cocycle normalisé, i.e. $f(1, s_2, s_3) = f(s_1, 1, s_3) = f(s_1, s_2, 1) = 0$. Ecrivons les conditions de compatibilité (15') et (17') (Prop. 8), nous obtenons

$$(26) \qquad \begin{aligned} \ell(s) &= \ell(1) \\ r(s) &= s\,\ell(1) \end{aligned}$$

compte tenu de la normalisation de $f$ et de la relation $\ell(1) = r(1)$. Donc ici une contrainte d'unité est bien déterminée par un élément $\ell(1) = u \in N$, i.e bien déterminée par la donnée d'un morphisme $(1, u)$. Prenons un autre morphisme $(1, u')$ qui donne d'après (26) un autre couple $(\ell', r')$ de fonctions $M \to N$

$$\ell'(s) = u'$$
$$r'(s) = s u'$$

Il existe manifestement un isomorphisme $\lambda = (1, u'-u)$ entre les unités correspondant à $(\ell, r)$ et $(\ell', r')$. (§2, n°3, Déf. 10). On peut se demander ici s'il y a toujours un morphisme entre deux unités d'une $\otimes$-catégorie. Pour répondre à cette question, reprenons l'exemple dans (§2, n°3). Dans ce cas, la donnée d'une unité revient à celle d'un couple $(\ell, r)$ de fonctions $M \to N$ vérifiant $\ell(1) = r(1)$ ; celle d'un morphisme entre les unités correspondant à $(\ell, r)$, $(\ell', r')$ revient à donner un élément $v \in N$ vérifiant

$$\ell'(s) = \ell(s) + v$$
$$r'(s) = r(s) + s v$$

pour tout $s \in M$, ce qui n'a pas lieu en général pour $(\ell, r)$, $(\ell', r')$ arbitraires. Nous allons montrer ci-dessous qu'il existe toujours un morphisme entre deux unités d'une $\otimes$-catégorie associative. Précisans qu'il s'agit des unités compatibles avec la contrainte d'associativité.

<u>Proposition 16.</u>– Soient $(a, (\underline{1}, g, d))$ et $(a, (\underline{1}', g', d'))$ deux contraintes AU pour une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Alors il existe un morphisme unique $\lambda$ qui est un isomorphisme de $(\underline{1}, g, d)$ dans $(\underline{1}', g', d')$.

<u>Démonstration.</u>– S'il existe un morphisme $\lambda : (\underline{1}, g, d) \longrightarrow (\underline{1}', g', d')$, $\lambda$ est bien unique et est un isomorphisme (§2, n°3, Déf. 10). Montrons donc l'existence de $\lambda$. Pour cela considérons les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd} & \underline{1}\otimes\underline{1} \arrow[d, "g'_{\underline{1}}g^{-1}_{\underline{1}}"] \\ \underline{1} \arrow[ur, "g_{\underline{1}}"] \arrow[r, "g'_{\underline{1}}"'] & \underline{1}'\otimes\underline{1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \underline{1}\otimes\underline{1} \arrow[d, "d'_{\underline{1}}d^{-1}_{\underline{1}}"] \\ \underline{1} \arrow[ur, "d_{\underline{1}}"] \arrow[r, "d'_{\underline{1}}"'] & \underline{1}\otimes\underline{1}' \end{tikzcd}$$

Puisque $\underline{1}$ est régulier, alors il existe deux isomorphismes

$$\lambda, \lambda' : \underline{1} \longrightarrow \underline{1}'$$

tels que

$$(27) \qquad \lambda \otimes id_{\underline{1}} = g'_{\underline{1}}g^{-1}_{\underline{1}} \quad ; \quad id_{\underline{1}} \otimes \lambda' = d'_{\underline{1}}d^{-1}_{\underline{1}} .$$

Montrons $\lambda = \lambda'$. Dans ce but, considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & \underline{1}\otimes\underline{1} \arrow[dl, "id\otimes g_{\underline{1}}"'] \arrow[dr, "id\otimes g'_{\underline{1}}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{I})"] & \\ \underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[rr, "id\otimes(\lambda\otimes id)"] \arrow[d, "a"'] & {} \arrow[d, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1}\otimes(\underline{1}'\otimes\underline{1}) \arrow[d, "a"] \\ (\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes\underline{1} \arrow[rr, "(id\otimes\lambda')\otimes id"] & {} \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\underline{1}\otimes\underline{1}')\otimes\underline{1} \\ & \underline{1}\otimes\underline{1} \arrow[ul, "d_{\underline{1}}\otimes id"] \arrow[ur, "d'_{\underline{1}}\otimes id"'] & \end{tikzcd}$$

dont la commutativité de (I), (III) résulte de (27) ; celle du contour extérieur vient de la condition de la compatibilité (16). D'où la commutativité de (II), ce qui donne $(id \otimes \lambda) \otimes id = (id \otimes \lambda') \otimes id$ en vertu de la fonctorialité de $a$, et par conséquent $\lambda = \lambda'$ puisque $\underline{1}$ est régulier. Il nous reste à prouver que $\lambda$ est un morphisme de $(\underline{1}, g, d)$ dans $(\underline{1}', g, d)$. Il suffit de montrer que pour tout objet $X$ de $\underline{C}$, le triangle

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{1}\otimes X \arrow[d, "\lambda\otimes id"] \\
X \arrow[ur, "g_X"] \arrow[dr, "g'_X"'] & \\
 & \underline{1}'\otimes X
\end{tikzcd}$$

est commutatif, la preuve de l'assertion analogue pour $d_X$, $d'_X$ étant semblable. Ce triangle est la région (I) (à facteur $\underline{1}$ près) du diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes X) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id\otimes(\lambda\otimes id)"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes X \arrow[d, "(id\otimes\lambda)\otimes id"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{III})"] & \underline{1}\otimes X \arrow[l, "d_{\underline{1}}\otimes id"'] \arrow[dl, "d'_{\underline{1}}\otimes id"] \\
\underline{1}\otimes X \arrow[ur, "id\otimes g_X"] \arrow[r, "id\otimes g'_X"'] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{I})", near start] & \underline{1}\otimes(\underline{1}'\otimes X) \arrow[r, "a"'] & (\underline{1}\otimes\underline{1}')\otimes X &
\end{tikzcd}$$

dont la région (II) est commutative par naturalité de $a$, (III) par (27) et l'égalité $\lambda = \lambda'$, et enfin le circuit extérieur par la condition de compatibilité (16). D'où la commutativité de (I).

Les formules suivantes nous seront utiles au chapitre II.

<u>Proposition 17</u>. — Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie AU et soit $(a, (\underline{1}, g, d))$ sa contrainte AU. On a les formules suivantes (§2, n° 3, Prop. 8) où $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, $u \in \mathrm{End}(\underline{1})$

(28) $$\gamma_{X\otimes Y}(u) = \gamma_X(u)\otimes id_Y$$

(29) $$\delta_{X\otimes Y}(u) = id_X\otimes\delta_Y(u)$$

(30) $$\delta_X(u)\otimes id_Y = id_X\otimes\gamma_Y(u)$$

<u>Démonstration</u>. — Considérons les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}
X\otimes Y \arrow[r, "\gamma_{X\otimes Y}(u)"] \arrow[d, "g_{X\otimes Y}"'] \arrow[ddd, bend right=60, "id"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & X\otimes Y \arrow[d, "g_{X\otimes Y}"] \arrow[ddd, bend left=60, "id"] \\
\underline{1}\otimes(X\otimes Y) \arrow[r, "u\otimes(id\otimes id)"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1}\otimes(X\otimes Y) \arrow[d, "a"] \\
(\underline{1}\otimes X)\otimes Y \arrow[r, "(u\otimes id)\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\underline{1}\otimes X)\otimes Y \\
X\otimes Y \arrow[r, "\gamma_X(u)\otimes id"'] \arrow[u, "g_X\otimes id"] & X\otimes Y \arrow[u, "g_X\otimes id"']
\end{tikzcd}$$

(IV) (V)

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "\delta_{X\otimes Y}(u)"] \arrow[d, "d_{X\otimes Y}"'] \arrow[ddd, bend right=70, "id"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & X \otimes Y \arrow[d, "d_{X\otimes Y}"] \arrow[ddd, bend left=70, "id"] \\
(X\otimes Y)\otimes \underline{1} \arrow[r, "(id_X \otimes id_Y)\otimes u"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & (X\otimes Y)\otimes \underline{1} \\
X \otimes (Y \otimes \underline{1}) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "id_X \otimes (id_Y \otimes u)"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & X \otimes (Y \otimes \underline{1}) \arrow[u, "a"'] \\
X \otimes Y \arrow[u, "id_X \otimes d_Y"] \arrow[r, "id_X \otimes \delta_Y(u)"] & X \otimes Y \arrow[u, "id_X \otimes d_Y"']
\end{tikzcd}$$

(IX) (X)

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "id_X \otimes \gamma_Y(u)"] \arrow[d, "id_X \otimes g_Y"'] \arrow[ddd, bend right=70, "id"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XI})"] & X \otimes Y \arrow[d, "id_X \otimes g_Y"] \arrow[ddd, bend left=70, "id"] \\
X \otimes (\underline{1} \otimes Y) \arrow[r, "id_X \otimes (u \otimes id_Y)"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XII})"] & X \otimes (\underline{1} \otimes Y) \arrow[d, "a"] \\
(X \otimes \underline{1}) \otimes Y \arrow[r, "(id_X \otimes u)\otimes id_Y"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XIII})"] & (X \otimes \underline{1}) \otimes Y \\
X \otimes Y \arrow[u, "d_X \otimes id_Y"] \arrow[r, "\delta_X(u) \otimes id_Y"] & X \otimes Y \arrow[u, "d_X \otimes id_Y"']
\end{tikzcd}$$

(XIV) (XV)

dont la commutativité des régions (I), (III), (VI), (VIII), (XI), (XIII) vient de la définition de $\gamma$ et $\delta$ (§2, n°3, Prop. 8) ; celle de (II), (VII), (XII) résulte de la naturalité de a ; et enfin celle de (IV), (V), (IX), (X), (XIV), (XV) découle des conditions de compatibilité (15), (16), (17). D'où la commutativité des trois circuits extérieurs, ce qui nous donne les formules considérées.

## 3. Commutativité et unité

<u>Définition 7</u>.– Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une contrainte de commutativité c et une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$ sont dites <u>compatibles</u>, si pour tout objet X de $\underline{C}$, le triangle

(31) $$\begin{tikzcd}
 & \underline{1} \otimes X \arrow[d, "c_{\underline{1},X}"] \\
X \arrow[ur, "g_X"] \arrow[r, "d_X"'] & X \otimes \underline{1}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. On a en particulier

$$c_{1,1} = id_{1 \otimes 1} \tag{32}$$

Un couple $(c, (1, g, d))$ comme ci-dessus est appelé une <u>contrainte mixte de commutativité - unité</u>, ou plus simplement une <u>contrainte CU</u> pour la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte CU est appelée une <u>$\otimes$-catégorie CU</u>.

<u>Proposition 18.</u> - Dans une $\otimes$-catégorie CU $\underline{C}$, les homomorphismes $\gamma_X$ et $\delta_X$ (§ 2, n° 3, Prop. 8) sont égaux pour tout objet $X$ de $\underline{C}$.

<u>Démonstration.</u> - Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\gamma_X(u)"] \arrow[d, "g_X"'] \arrow[dddd, bend right=60, "id"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & X \arrow[d, "g_X"] \arrow[dddd, bend left=60, "id"] \\
\underline{1} \otimes X \arrow[r, "u \otimes id_X"] \arrow[d, "c_{\underline{1},X}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1} \otimes X \arrow[d, "c_{\underline{1},X}"] \\
X \otimes \underline{1} \arrow[r, "id_X \otimes u"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] \arrow[l, phantom, "(\mathrm{IV})"] & X \otimes \underline{1} \arrow[r, phantom, "(\mathrm{V})"] & {} \\
\\
X \arrow[uu, "d_X"] \arrow[r, "\delta_X(u)"] & X \arrow[uu, "d_X"']
\end{tikzcd}$$

où la commutativité des régions (I), (III) résulte de la définition de $\gamma_X$ et $\delta_X$ ; celle de (II) résulte de la naturalité de $c$ ; et, enfin celle de (IV), (V) résulte de la condition de compatibilité (31). On obtient $\gamma_X(u) = \delta_X(u)$ pour tout $u \in End(\underline{1})$, donc

$$\gamma_X = \delta_X \tag{33}$$

pour tout $X \in ob\,\underline{C}$.

## <u>4. Associativité, commutativité et unité</u>

<u>Définition 8.</u> - Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. On dit qu'une contrainte d'associativité $a$, une contrainte de commutativité $c$ et une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$ pour $\underline{C}$ sont <u>compatibles</u>, si elles sont compatibles deux à deux, au sens défini dans (n° 1, Déf. 1), (n° 2, Déf. 5), et

(n°3, Déf. 7).

Un triple $(a, c, (\underline{1}, g, d))$ comme ci-dessus est appelé une contrainte mixte d'associativité-commutativité-unité, ou plus simplement une contrainte ACU pour la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU est appelée une $\otimes$-catégorie ACU. Elle est dite stricte si c l'est (§2, n°2, Déf. 8).

On va démontrer ci-dessous que les conditions de compatibilité dans la définition 8 sont surabondantes.

Proposition 11.- Soient $a$, $c$, $(\underline{1}, g, d)$ des contraintes d'associativité, commutativité, unité pour une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Si $a$ est compatible avec $c$ et avec $(\underline{1}, g, d)$ séparément, alors $c$ est compatible avec $(\underline{1}, g, d)$.

Démonstration.- Le triangle de compatibilité entre $c$ et $(\underline{1}, g, d)$ (Diag. (31)) se retrouve en la région (IV) (à facteur régulier $\underline{1}$ près) du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\underline{1}\otimes X \arrow[r, "g_{\underline{1}\otimes X}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes X) \arrow[d, "a"] \arrow[ddddd, bend left=60, "id_{\underline{1}}\otimes c_{\underline{1},X}"] \arrow[ddddd, phantom, bend left=30, "(\mathrm{VI})"] \\
\underline{1}\otimes X \arrow[r, "g_{\underline{1}}\otimes id_X"] \arrow[d, "c_{\underline{1},X}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes X \arrow[d, "c"] \\
X\otimes\underline{1} \arrow[r, "id_X\otimes g_{\underline{1}}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & X\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[d, "a"] \\
X\otimes\underline{1} \arrow[r, "d_X\otimes id_{\underline{1}}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & (X\otimes\underline{1})\otimes\underline{1} \\
X\otimes\underline{1} \arrow[r, "g_X\otimes id_{\underline{1}}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & (\underline{1}\otimes X)\otimes\underline{1} \arrow[u, "c_{\underline{1},X}\otimes id_{\underline{1}}"'] \\
X\otimes\underline{1} \arrow[r, "g_{X\otimes\underline{1}}"] & \underline{1}\otimes(X\otimes\underline{1}) \arrow[u, "a"']
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (III), (V) résulte des conditions de compatibilité (15), (16), (17) du n° 2 ; celle de (II) résulte de la naturalité de c ; celle de (VI) résulte de l'axiome de l'hexagone ; et enfin celle du contour extérieur résulte de la naturalité de g. D'où la commutativité de (IV).

Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU $(a, c, (\underline{1}, g, d))$.

Considérons une famille d'objets $(X_i)_{i\in J}$ de $\underline{C}$, indexée par un ensemble non vide totalement ordonné $(J, <)$. Les ensembles $I \subset J$ considérés sont supposés finis et peuvent être vides. Comme $\underline{C}$ est à la fois AC et AU, nous allons procéder comme dans les n$^{os}$ 1 et 2. De façon précise, nous définissons le produit canonique $\underset{I}{\otimes} X_i$ d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre canonique de la manière suivante :

1° $\underset{I}{\otimes} X_i = \underline{1}$ si $I = \emptyset$

2° $\underset{I}{\otimes} X_i = X_\beta$ si $I = \{\beta\}$

3° $\underset{I}{\otimes} X_i = (\underset{I'}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta$ si $I$ a $p > 1$ éléments avec $\beta$ le plus grand élément et $I'$ l'ensemble des éléments $< \beta$ de $I$.

Nous définissons les produits de $(X_i)_{i\in I}$ comme dans (n°1, Déf. 3).

Enfin pour chaque couple $(I_1, I_2)$ de sous-ensembles (qui peuvent être vides) de $I$ tels que $I = I_1 \amalg I_2$, définissons un isomorphisme fonctoriel en les $X_i$, $i \in I$,

$$\underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow{\Psi_{I_1, I_2}} (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i)$$

de la manière suivante :

1° Si $I_1 = \emptyset$, alors

$$\Psi_{I_1, I_2} = g_{\underset{I}{\otimes} X_i}$$

2° Si $I_2 = \emptyset$, alors

$$\Psi_{I_1, I_2} = d_{\underset{I}{\otimes} X_i}$$

3° Si $I_1 \neq \emptyset$ et $I_2 \neq \emptyset$, alors $\Psi_{I_1, I_2}$ est défini comme dans (n°1, Déf. 4).

<u>Proposition 20</u>.- Pour chaque couple $(I_1, I_2)$ de sous-ensembles de $I$ tels que $I = I_1 \amalg I_2$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2}"] \arrow[d, equal] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i) \arrow[d, dashed, "c"] \\
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2, I_1}"] & (\underset{I_2}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_1}{\otimes} X_i)
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.– 1° $I_1$ et $I_2$ sont tous différents de l'ensemble vide. La démonstration est analogue à celle dans (n° 1, Prop. 1).

2° $I_1$ ou $I_2$ est l'ensemble vide. La commutativité du diagramme considéré résulte de la compatibilité entre c et (1, g, d) compte tenu de la définition de $\Psi_{I_1, I_2}$ ci-dessus.

<u>Proposition 21</u>.– Pour chaque triple $(I_1, I_2, I_3)$ de sous-ensembles de $I$ tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2 \amalg I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2 \amalg I_3} X_i) \arrow[r, "id \otimes \Psi_{I_2, I_3}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \amalg I_2, I_3}"] & (\bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2} \otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.– 1° $I_1, I_2, I_3$ sont différents de vide. Dans ce cas la démonstration est la même que celle dans (n° 1, Prop. 2).

2° L'un des trois ensembles $I_1, I_2, I_3$ est l'ensemble vide. Alors la démonstration est analogue à celle dans (n° 2, Prop. 9 (2°, 3°, 4°)).

<u>Proposition 22</u>.– Pour toute famille $(X_i)_{i \in I}$, les diagrammes suivants sont commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[rr, equal] \arrow[d, equal] & & \bigotimes_I X_i \arrow[d, "g_{\bigotimes_I X_i}"'] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{\emptyset, I}"] & (\bigotimes_{\emptyset} X_i) \otimes (\bigotimes_I X_i) \arrow[r, equal] & \underline{1} \otimes (\bigotimes_I X_i)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[rr, equal] \arrow[d, equal] & & \bigotimes_I X_i \arrow[d, "d_{\bigotimes_I X_i}"'] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I, \emptyset}"] & (\bigotimes_I X_i) \otimes (\bigotimes_{\emptyset} X_i) \arrow[r, equal] & (\bigotimes_I X_i) \otimes \underline{1}
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.– Résultat immédiat de la définition de $\bigotimes_{\emptyset} X_i$, $\Psi_{\emptyset, I}$, $\Psi_{I, \emptyset}$.

<u>Proposition 23</u>.– Chaque produit $Y$ d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ est isomorphe au produit canonique relativement à l'ordre canonique $\bigotimes_{I'} X_i$ par un isomorphisme

$$y : \bigotimes_{I'} X_i \xrightarrow{\sim} Y$$

fonctoriel en les $X_i$, $i \in I'$, $I'$ étant l'ensemble des $i \in I$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$.

Démonstration. – 1° Pour $I = \{\beta\}$, on a $I' = I$ pour $X_\beta \neq \underline{1}$ et $I' = \emptyset$ pour $X_\beta = \underline{1}$. Dans les deux cas on pose

$$y = id_{X_\beta} .$$

2° Pour $I$ ayant $p > 1$ éléments, en remarquant que $Y$ doit être de la forme $Y = Z \otimes T$, $Z$ et $T$ étant des produits de $(X_i)_{i \in I_1}$, $(X_i)_{i \in I_2}$ respectivement avec $I = I_1 \amalg I_2$, on définit $y$ comme le composé des isomorphismes

$$\underset{I'}{\otimes} X_i \xrightarrow{\Psi_{I_1', I_2'}} (\underset{I_1'}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2'}{\otimes} X_i) \xrightarrow{z \otimes t} Z \otimes T = Y$$

$z$ et $t$ étant les isomorphismes par hypothèse de récurrence.

3° Pour $I = \emptyset$, on a $Y = \underline{1}$ et $\underset{I'}{\otimes} X_i = \underline{1}$. Dans ce cas on pose

$$y = id_{\underline{1}} .$$

L'isomorphisme $y$ construit comme ci-dessus est appelé <u>l'isomorphisme canonique</u>.

Moyennant les propositions 20, 21, 22 et 23, nous avons les propositions suivantes dont la démonstration est comme celle dans (§2, n°1).

<u>Proposition 24</u>. – Soient $I_1, I_2, I_3$ des sous-ensembles non vides de $I$ tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$ ; et soient $Y, Z, T$ des produits de $(X_i)_{i \in I_1}$, $(X_i)_{i \in I_2}$, $(X_i)_{i \in I_3}$ respectivement. Alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underset{I'}{\otimes} X_i \arrow[r, "b"] \arrow[d, equal] & Y \otimes (Z \otimes T) \arrow[d, "a"] \\
\underset{I'}{\otimes} X_i \arrow[r, "b'"] & (Y \otimes Z) \otimes T
\end{tikzcd}$$

$b$ et $b'$ étant les isomorphismes canoniques et $I'$ l'ensemble des éléments $i \in I$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$.

<u>Proposition 25</u>. Soient $I_1, I_2$ des sous-ensembles non vides de $I$

tels que $I = I_1 \amalg I_2$ ; et soient $Y$, $Z$ des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \bigotimes_{I'} X_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y\otimes Z \arrow[d, "c"] \\ \bigotimes_{I'} X_i \arrow[r, "f'"] & Z\otimes Y \end{tikzcd}$$

est commutatif ; $f$ et $f'$ étant les isomorphismes canoniques et $I'$ l'ensemble des éléments $i \in I$ tels que $X_i \neq \underline{1}$.

<u>Proposition 26</u>.– Soit $Y$ un produit d'une famille non vide $(X_i)_{i\in I}$ : les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{tikzcd} \bigotimes_{I'} X_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d, "g_Y"] \\ \bigotimes_{I'} X_i \arrow[r, "g'"] & \underline{1}\otimes Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bigotimes_{I'} X_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d, "d_Y"] \\ \bigotimes_{I'} X_i \arrow[r, "g''"] & Y\otimes \underline{1} \end{tikzcd}$$

$g$, $g'$, $g''$ étant les isomorphismes canoniques et $I'$ l'ensemble des éléments $i$ de $I$ tels que $X_i \neq \underline{1}$.

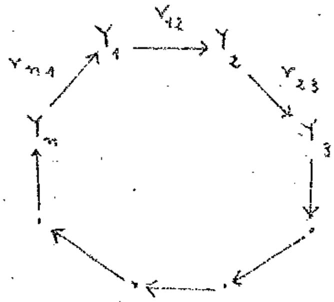
<u>Proposition 27</u>.– Soient $Y_1$, $Y_2$ des produits des familles non vides $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement et telles que l'ensemble des $i \in I_j$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$ est le même ensemble $I$ pour $j = 1, 2$. Soit $v : Y_1 \xrightarrow{\sim} Y_2$ un isomorphisme construit à l'aide de $a$, $a^{-1}$, $c$, $c^{-1}$, $g$, $g^{-1}$, $d$, $d^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, equal] & Y_1 \arrow[d, "v"] \\ \bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "g_2"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

est commutatif ; $g_1$, $g_2$ étant les isomorphismes canoniques.

<u>Proposition 28</u>.– Soient $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ des produits des familles non vides $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$, .... $(X_i)_{i\in I_n}$ respectivement et telles que l'ensemble des $i \in I_j$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$ est le même pour $j = 1, 2, \dots, n$. Soient $v_{i,i+1} : Y_i \to Y_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ et $v_{n1} : Y_n \to Y_1$ des iso-

morphismes construits au moyen de $a$, $a^{-1}$, $c$, $c^{-1}$, $g$, $g^{-1}$, $d$, $d^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$. Alors le polygone suivant est commutatif.




<u>Exemple</u>. — Le polygone suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
(\underline{1}\otimes X)\otimes((Y\otimes Z)\otimes\underline{1}) \arrow[rr, "id\otimes d_{Y\otimes Z}"] \arrow[d, "c"'] & & (\underline{1}\otimes X)\otimes(Y\otimes Z) \arrow[d, "a"] \\
((Y\otimes Z)\otimes\underline{1})\otimes(\underline{1}\otimes X) \arrow[d, "d^{-1}_{Y\otimes Z}\otimes g^{-1}_X"'] & & ((\underline{1}\otimes X)\otimes Y)\otimes Z \arrow[d, "(g^{-1}_X\otimes id)\otimes id"] \\
(Y\otimes Z)\otimes X \arrow[dr, "c"'] & & (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[dl, "a^{-1}"] \\
& X\otimes(Y\otimes Z) &
\end{tikzcd}$$

<u>5. Objets inversibles</u>

Dans ce n°, $\underline{C}$ désigne une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AU $(a, (\underline{1}, g, d))$.

<u>Définition 9</u>. — Soit $X$ un objet de $\underline{C}$. On dit que $X$ est <u>inversible</u> s'il existe des objets $X'$, $X''$ de $\underline{C}$ tels que $X'\otimes X \simeq \underline{1}$, $X\otimes X'' \simeq \underline{1}$.

<u>Proposition 29</u>. — Si $X'\otimes X \xrightarrow[\sim]{x'} \underline{1}$, $X\otimes X'' \xrightarrow[\sim]{x''} \underline{1}$ ; alors $X'\simeq X''$.

<u>Démonstration</u>. — En effet, on a

$$X' \xrightarrow[\sim]{d_{X'}} X'\otimes\underline{1} \xleftarrow[\sim]{id\otimes x''} X'\otimes(X\otimes X'') \xrightarrow[\sim]{a} (X'\otimes X)\otimes X'' \xrightarrow[\sim]{x'\otimes id} \underline{1}\otimes X'' \xleftarrow[\sim]{g_{X''}} X''.$$

<u>Corollaire</u>. — $X$ est inversible si et seulement s'il existe $X'$ tel que $X'\otimes X \simeq \underline{1}$ et $X\otimes X' \simeq \underline{1}$.

<u>Démonstration</u>. — S'il existe $X'$ tel que $X'\otimes X \simeq \underline{1}$, $X\otimes X' \simeq \underline{1}$, on a bien $X$ inversible d'après la définition 9. Inversement, sup-

posons $X$ inversible, c'est à dire il existe $X'$, $X''$ tels que $X' \otimes X \simeq \underline{1}$ et $X \otimes X'' \simeq \underline{1}$. Or la proposition 29 nous donne $X' \simeq X''$, d'où $X \otimes X'' \simeq X \otimes X' \simeq \underline{1}$. Il résulte du corollaire que $X'$ est aussi inversible.

<u>Proposition 30</u>.– $X$ est inversible si et seulement si $X$ est régulier ([illegible])

<u>Démonstration</u>.– Si $X$ est inversible, en vertu du corollaire de la proposition 29, il existe $X'$ tel que $X' \otimes X \simeq \underline{1}$ et $X \otimes X' \simeq \underline{1}$. Alors les foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}$

$$F : \underline{C} \longrightarrow \underline{C} \qquad G : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$$
$$Y \longmapsto Y \otimes X \qquad Y \longmapsto Y \otimes X'$$

$$F' : \underline{C} \longrightarrow \underline{C} \qquad G' : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$$
$$Y \longmapsto X \otimes Y \qquad Y \longmapsto X' \otimes Y$$

vérifient les relations

$$GF \simeq id_{\underline{C}} , \quad FG \simeq id_{\underline{C}}$$
$$G'F' \simeq id_{\underline{C}} , \quad F'G' \simeq id_{\underline{C}} .$$

Donc $F$ et $F'$ sont des équivalences, et par conséquent $X$ est régulier.

Inversement, supposons que $X$ soit régulier ; d'où $F$, $F'$ sont des équivalences. On en déduit l'existence de $X'$, $X''$ tels que $X' \otimes X \simeq \underline{1}$ et $X \otimes X'' \simeq \underline{1}$, donc $X$ est inversible.

<u>Proposition 31</u>.– Soient $X$ un objet inversible et $X^{-1}$ tel que $X^{-1} \otimes X \xrightarrow[\sim]{t_X} \underline{1}$, $X \otimes X^{-1} \xrightarrow[\sim]{p_X} \underline{1}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

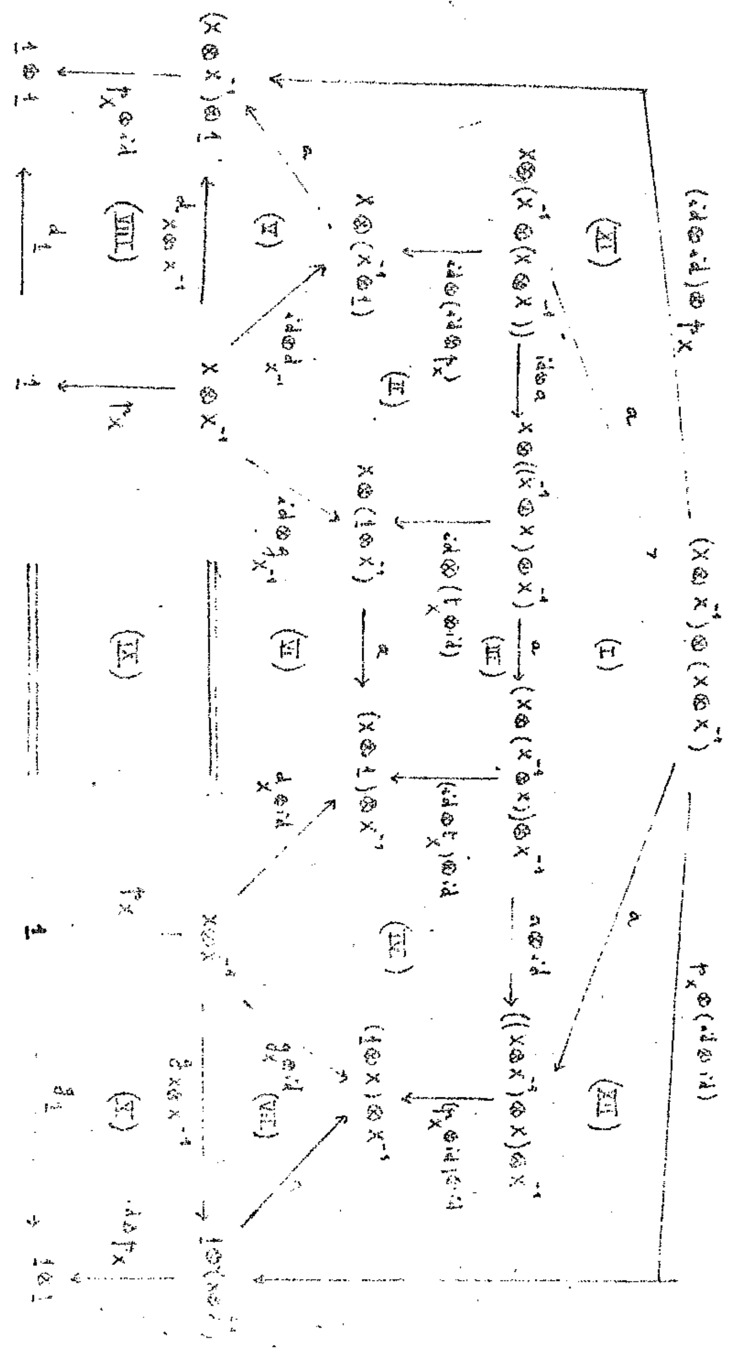
a) Le pentagone suivant est commutatif

$$(34) \qquad \begin{tikzcd}
X^{-1} \otimes (X \otimes X^{-1}) \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "id \otimes p_X"'] & & (X^{-1} \otimes X) \otimes X^{-1} \arrow[d, "t_X \otimes id"] \\
X^{-1} \otimes \underline{1} & & \underline{1} \otimes X^{-1} \\
& X^{-1} \arrow[ul, "d_{X^{-1}}"] \arrow[ur, "g_{X^{-1}}"'] &
\end{tikzcd}$$

b) Le pentagone suivant est commutatif

(35)
$$
\begin{tikzcd}
X\otimes(X^{-1}\otimes X) \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "id\otimes t_X"'] & & (X\otimes X^{-1})\otimes X \arrow[d, "f_X\otimes id"] \\
X\otimes \underline{1} & & \underline{1}\otimes X \\
& X \arrow[ul, "d_X"] \arrow[ur, "g_X"'] &
\end{tikzcd}
$$

Démonstration.- les diagrammes (34) et (35) se retrouvent en les régions (II) et (III) (à facteur régulier près) du diagramme suivant



dans lequel la commutativité de la région (I) résulte de l'axiome du pentagone ; celle des régions (III), (XI), (XII) résulte de la fonctorialité de $a$ ; celle des régions (V), (VI), (VII) résulte de la compatibilité entre $a$ et $(\underline{1}, g, d)$ ; celle de la région (VIII) résulte de la fonctorialité de $d$ ; celle de (IX) est évidente ; celle de (X) résulte de la fonctorialité de $g$ ; et celle du circuit extérieur vient de la relation $d_{\underline{1}} = g_{\underline{1}}$ (§2, n°3, Déf. 9, Rel. (6)). D'où la commutativité de (II) est équivalente à celle de (IV), ce qui démontre la proposition.

Il résulte de la proposition que, pour l'isomorphisme $t_X : X^{-1} \otimes X \xrightarrow{\sim} \underline{1}$ donné, il existe un et seulement un isomorphisme $p_X : X \otimes X^{-1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}$ rendant commutatifs les diagrammes (34) et (35) ; ce qui nous donne la définition suivante

<u>Définition 10</u>.— Un inverse pour un objet $X$ inversible de $\underline{C}$ est un triple $(X^{-1}, t_X, p_X)$ avec

$$t_X : X^{-1} \otimes X \xrightarrow{\sim} \underline{1} \ , \ p_X : X \otimes X^{-1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}$$

rendant commutatifs les diagrammes (34), (35).

<u>Proposition 32</u>.— Soient $(X^{-1}, t_X, p_X)$, $(X', t'_X, p'_X)$ deux inverses pour un objet inversible $X$ et $k$ l'isomorphisme déterminé par le diagramme commutatif

(36)
$$\begin{tikzcd}
X^{-1} \otimes X \arrow[rr, "k \otimes id"] \arrow[dr, "t_X"'] & & X' \otimes X \arrow[dl, "t'_X"] \\
& \underline{1} &
\end{tikzcd}$$

Alors le diagramme suivant est commutatif (et inversement)

(37)
$$\begin{tikzcd}
X \otimes X^{-1} \arrow[rr, "id \otimes k"] \arrow[dr, "p_X"'] & & X \otimes X' \arrow[dl, "p'_X"] \\
& \underline{1} &
\end{tikzcd}$$

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
X\otimes(X^{-1}\otimes X) \arrow[r, "a"] \arrow[rrrr, bend left, "id\otimes(k\otimes id)"] \arrow[dd, "id\otimes t_X"'] & (X\otimes X^{-1})\otimes X \arrow[rr, "(id\otimes k)\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & \arrow[u, phantom, "\mathrm{(I)}"] & (X\otimes X')\otimes X & X\otimes(X'\otimes X) \arrow[l, "a"'] \arrow[dd, "id\otimes t'_X"] \\
\arrow[r, phantom, "\mathrm{(II)}"] & & \underline{1}\otimes X \arrow[ul, "p_X\otimes id"] \arrow[ur, "p'_X\otimes id"'] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(III)}"] & & \\
X\otimes\underline{1} & & X \arrow[ll, "d_X"'] \arrow[rr, "d_X"] \arrow[u, "g_X"'] & & X\otimes\underline{1}
\end{tikzcd}$$

dont la région (II) est le diagramme (37) (à facteur régulier près). Ici la la commutativité de la région (I) résulte de la fonctorialité de $a$ ; celle de (II), (III) vient de la définition 10 ; et celle du circuit extérieur est donnée par l'hypothèse. D'où la commutativité de (II) et par suite celle de (37).

Considérons maintenant une famille finie d'objets $(X_i)_{i\in I}$. Supposons $I = I_1 \amalg \{j,k\} \amalg I_2$ avec $i_1 < j < k < i_2$ pour tout $i_1 \in I_1$, tout $i_2 \in I_2$ ($I$ est supposé totalement ordonné), et de plus $X_j = X^{-1}$, $X_k = X$ (resp. $X_j = X$, $X_k = X^{-1}$). Définissons une "<u>contraction</u>" $r$ (resp. $s$) : $\underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow{\sim} \underset{I_1\amalg I_2}{\otimes} X_i$ par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\phi_{I_1\amalg\{j,k\},I_2}"] \arrow[d, "r\ (\text{resp. } s)"'] & (\underset{I_1\amalg\{j,k\}}{\otimes} X_i)\otimes(\underset{I_2}{\otimes} X_i) \arrow[r, "\phi_{I_1,\{j,k\}}\otimes id"] & ((\underset{I_1}{\otimes} X_i)\otimes(\underset{\{j,k\}}{\otimes} X_i))\otimes(\underset{I_2}{\otimes} X_i) \arrow[d, "(id\otimes t_X)\otimes id\ (\text{resp. } (id\otimes p_X)\otimes id)"] \\
(\underset{I_1\amalg I_2}{\otimes} X_i) \arrow[r, "\phi_{I_1,I_2}"] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i)\otimes(\underset{I_2}{\otimes} X_i) \arrow[r, "\phi_{I_1,\emptyset}\otimes id"] & ((\underset{I_1}{\otimes} X_i)\otimes(\underset{\emptyset}{\otimes} X_i))\otimes(\underset{I_2}{\otimes} X_i)
\end{tikzcd}$$

les isomorphismes $\phi$ étant les isomorphismes définis dans ($n^\circ 2$, Déf. 6). Il peut arriver qu'on a en outre $I_2 = \{\ell\} \amalg I'_2$ avec $\ell < i_2$ pour tout $i_2 \in I'_2$ et $X_\ell = X^{-1}$ (resp. $X_\ell = X$), alors on vérifie aisément en vertu des ~~la proposition~~ diagrammes commutatifs (34) et (35) que l'isomorphisme $r$ (resp. $s$) est égal à l'isomorphisme $r'$ (resp. $s'$) défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\phi_{I_1\amalg\{j,k,l\},I'_2}"] \arrow[d, "r'\ (\text{resp. } s')"'] & (\bigotimes\limits_{I_1\amalg\{j,k,l\}} X_i)\otimes(\bigotimes\limits_{I'_2} X_i) \arrow[r, "\phi_{I_1\amalg\{j\},\{k,l\}}\otimes id"] & ((\bigotimes\limits_{I_1\amalg\{j\}} X_i)\otimes(\bigotimes\limits_{\{k,l\}} X_i))\otimes(\bigotimes\limits_{I'_2} X_i) \arrow[d, "(id\otimes p_X)\otimes id\ (\text{resp. } (id\otimes t_X)\otimes id)"] \\
\bigotimes\limits_{I_1\amalg I_2} X_i \arrow[r, "\phi_{I_1\amalg\{j\},I'_2}"] & (\bigotimes\limits_{I_1\amalg\{j\}} X_i)\otimes(\bigotimes\limits_{I'_2} X_i) \arrow[r, "\phi_{I_1\amalg\{j\},\emptyset}\otimes id"] & ((\bigotimes\limits_{I_1\amalg\{j\}} X_i)\otimes(\bigotimes\limits_{\emptyset} X_i))\otimes(\bigotimes\limits_{I'_2} X_i)
\end{tikzcd}$$

les contractions $r$ et $s$ nous donnent aussitôt la proposition suivante

<u>Proposition 33</u>.– Tout diagramme dans $\underline{C}$ construit à l'aide de $a$, $a^{-1}$, $g$, $g^{-1}$, $d$, $d^{-1}$, $t$, $t^{-1}$, $p$, $p^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$ est commutatif.

La proposition 33 nous permet d'énoncer la proposition suivante.

<u>Proposition 34</u>.– Si $(X^{-1}, t_X, p_X)$ et $(Y^{-1}, t_Y, p_Y)$ sont des inverses pour $X$ et $Y$ inversibles respectivement, $(X, p_X, t_X)$ est un inverse pour $X^{-1}$ et $(Y^{-1}\otimes X^{-1}, t_{X\otimes Y}, p_{X\otimes Y})$ est un inverse pour $X\otimes Y$, où $t_{X\otimes Y}$, $p_{X\otimes Y}$ sont définis par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
((Y^{-1}\otimes X^{-1})\otimes X)\otimes Y & (Y^{-1}\otimes(X^{-1}\otimes X))\otimes Y \arrow[l, "a\otimes id"'] \arrow[r, "(id\otimes t_X)\otimes id"] & (Y^{-1}\otimes 1)\otimes Y \\
(Y^{-1}\otimes X^{-1})\otimes(X\otimes Y) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "t_{X\otimes Y}"] & 1 & Y^{-1}\otimes Y \arrow[l, "t_Y"'] \arrow[u, "d_{Y^{-1}}\otimes id"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
((X\otimes Y)\otimes Y^{-1})\otimes X^{-1} & (X\otimes(Y\otimes Y^{-1}))\otimes X^{-1} \arrow[l, "a\otimes id"'] \arrow[r, "(id\otimes p_Y)\otimes id"] & (X\otimes 1)\otimes X^{-1} \\
(X\otimes Y)\otimes(Y^{-1}\otimes X^{-1}) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "p_{X\otimes Y}"] & 1 & X\otimes X^{-1} \arrow[l, "p_X"'] \arrow[u, "d_X\otimes id"']
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.– La première assertion résulte aussitôt de la définition 10 ; quant à la deuxième, elle est une conséquence immédiate de la proposition 33.

<u>Proposition 35</u>.– Soient $(X^{-1}, t_X, p_X)$, $(Y^{-1}, t_Y, p_Y)$, $(Z^{-1}, t_Z, p_Z)$ des inverses pour $X, Y, Z$ respectivement, et $f : X \xrightarrow{\sim} Y$, $h : Y \xrightarrow{\sim} Z$ des isomorphismes. On a les propriétés suivantes :

(i) Il existe un et un seul isomorphisme $\alpha(f)\ X^{-1} \xrightarrow{\sim} Y^{-1}$ rendant commutatif le diagramme

$$
(38)\qquad
\begin{tikzcd}
X^{-1}\otimes X \arrow[r, "t_X"] \arrow[dr, "id\otimes f"'] & \underline{1} & Y^{-1}\otimes Y \arrow[l, "t_Y"'] \\
& X^{-1}\otimes Y \arrow[ur, "\alpha(f)\otimes id"'] &
\end{tikzcd}
$$

(ii) Le diagramme suivant est commutatif :

$$
(39)\qquad
\begin{tikzcd}
X\otimes X^{-1} \arrow[r, "p_X"] \arrow[dr, "f\otimes id"'] & \underline{1} & Y\otimes Y^{-1} \arrow[l, "p_Y"'] \\
& Y\otimes X^{-1} \arrow[ur, "id\otimes\alpha(f)"'] &
\end{tikzcd}
$$

(iii) $\alpha(id) = id$ et $\alpha(hf) = \alpha(h)\,\alpha(f)$.

<u>Démonstration</u>.– (i) Conséquence immédiate de ce que $Y$ est régulier.

(ii) Considérons le diagramme suivant dont la région (IX) est le diagramme (39) (à facteur régulier près). Dans ce diagramme la com-

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
(Y^{-1}\otimes Y)\otimes Y^{-1} \arrow[r, "t_Y\otimes id"] & \underline{1}\otimes Y^{-1} & Y^{-1} \arrow[l, "g_{Y^{-1}}"'] \arrow[r, "d_{Y^{-1}}"] & Y^{-1}\otimes\underline{1} & & Y^{-1}\otimes(Y\otimes Y^{-1}) \arrow[ll, "id\otimes p_Y"'] \arrow[lllll, bend right=20, "a"'] \\
(Y^{-1}\otimes Y)\otimes X^{-1} \arrow[u, "id\otimes\alpha(f)"] \arrow[r, "t_Y\otimes id"] \arrow[d, equal] & \underline{1}\otimes X^{-1} \arrow[u, "id\otimes\alpha(f)"'] & X^{-1} \arrow[u, "\alpha(f)"'] \arrow[l, "g_{X^{-1}}"'] \arrow[r, "d_{X^{-1}}"] & X^{-1}\otimes\underline{1} \arrow[u, "\alpha(f)\otimes id"'] & & X^{-1}\otimes(Y\otimes Y^{-1}) \arrow[u, "\alpha(f)\otimes id"'] \arrow[ll, "id\otimes p_Y"'] \arrow[d, equal] \\
(Y^{-1}\otimes Y)\otimes X^{-1} \arrow[r, "t_Y\otimes id"] & \underline{1}\otimes X^{-1} & (X^{-1}\otimes X)\otimes X^{-1} \arrow[l, "t_X\otimes id"'] \arrow[dll, "(id\otimes f)\otimes id"] & X^{-1}\otimes(X\otimes X^{-1}) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes p_X"] \arrow[drr, "id\otimes(f\otimes id)"] & X^{-1}\otimes\underline{1} & X^{-1}\otimes(Y\otimes Y^{-1}) \arrow[l, "id\otimes p_Y"'] \\
(X^{-1}\otimes Y)\otimes X^{-1} \arrow[u, "(\alpha(f)\otimes id)\otimes id"] & & & & & X^{-1}\otimes(Y\otimes X^{-1}) \arrow[u, "id\otimes(id\otimes\alpha(f))"'] \arrow[lllll, "a"]
\end{tikzcd}
$$

(I) (II) (III) (IV) (V) (VI) (VII) (VIII) (IX)

mutativité des régions (I), (VI) résulte de la proposition 33 ; celle de (II) (V) est évidente ; celle de (III), (IV) est le résultat de la fonctorialité de $g$ et $d$ ; celle de (VII) est donné par la définition de $\alpha(f)$ ; et enfin celle de (VIII) et du circuit extérieur vient de la fonctorialité de $a$. D'où la commutativité de (IX) et par suite celle de (39). Ce résultat nous donne

$$\alpha(\alpha(f)) = f$$

en considérant $(X, p_X, t_Y)$, $(Y, p_Y, t_Y)$ comme des inverses de $X^{-1}$, $Y^{-1}$ respectivement (Prop. 34).

(iii) En faisant $Y = X$ et $f = id_X$ dans le diagramme (38), on a aussitôt $\alpha(id_X) = id_{X^{-1}}$. Pour démontrer $\alpha(hf) = \alpha(h)\alpha(f)$, considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
Z^{-1}\otimes Z \arrow[dd, "t_Z"'] & X^{-1}\otimes Z \arrow[l, "\alpha(hf)\otimes id"'] \arrow[rr, equal] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{II})"] & & X^{-1}\otimes Z \arrow[d, "\alpha(f)\otimes id"] \\
\arrow[r, phantom, "(\mathrm{I})"] & X^{-1}\otimes Y \arrow[u, "id\otimes h"'] \arrow[r, "\alpha(f)\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & Y^{-1}\otimes Y \arrow[d, "t_Y"] \arrow[r, "id\otimes h"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & Y^{-1}\otimes Z \arrow[d, "\alpha(h)\otimes id"] \\
\underline{1} & X^{-1}\otimes X \arrow[l, "t_X"'] \arrow[u, "id\otimes f"'] \arrow[r, "t_X"] & \underline{1} & Z^{-1}\otimes Z \arrow[l, "t_Z"']
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (III), (IV) résulte de la définition de $\alpha$ ; celle de (II) est évidente. D'où la commutativité du circuit extérieur, ce qui démontre l'assertion, compte tenu du fait que $Z$ est régulier.

<u>Exemple</u>. – Reprenons l'exemple dans (§3, n°2). Nous supposons de plus que $M$ est abélien et agit trivialement sur $N$. Donnons-nous une contrainte de commutativité (§2, n°2, Exemple)

$$c_{s_1, s_2} = (s_1 s_2, k(s_1, s_2))$$

compatible avec la contrainte d'associativité, $k(s_1, s_2)$ étant supposé normalisé. Ecrivons l'axiome de l'hexagone pour $X = Z = s$, $Y = s^{-1}$,

$$f(s, s^{-1}, s) + k(1, s) + f(s, s, s^{-1}) - k(s^{-1}, s) - f(s, s, s^{-1}) - k(s, s) = 0 .$$

Nous obtenons, compte tenu de la normalisation de $k$,

$$-f(s, s^{-1}, s) = -k(s^{-1}, s) - k(s, s)$$

ou, en vertu de l'antisymétrie de $k$

$$-f(s, s^{-1}, s) = k(s, s^{-1}) + k(s, s)$$

qui nous donne d'après la définition de $p_s$ (Déf. 40)

$$p_s = c(s, s^{-1}) + c(s, s) + t_s .$$

On en conclut que dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$, on n'a pas en général la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} X \otimes X^{-1} \arrow[rr, "c_{X,X^{-1}}"] \arrow[dr, "p_X"'] & & X^{-1} \otimes X \arrow[dl, "t_X"] \\ & \underline{1} & \end{tikzcd}$$

On peut démontrer qu'elle a lieu si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie ACU stricte (Chap. II, §2, n° 1, Prop. 3). Dans ce cas on a aussitôt la proposition suivante

Jo [illegible]

<u>Proposition 36</u>. – Tout diagramme dans une $\otimes$-catégorie ACU stricte, construit à l'aide de $a, a^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}, c, c^{-1}, t, t^{-1}, p, p^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$ est commutatif.

<u>Proposition 37</u>. – Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU. Si $(X^{-1}, t_X, p_X)$ et $(Y^{-1}, t_Y, p_Y)$ sont des inverses pour $X, Y$ inversibles, $(X^{-1}\otimes Y^{-1}, t'_{X\otimes Y}, p'_{X\otimes Y})$ est un inverse pour $X \otimes Y$, $t'_{X\otimes Y}$ et $p'_{X\otimes Y}$ sont les isomorphismes ~~vous~~ définis par les triangles commutatifs

$$(40)\qquad \begin{tikzcd} (X^{-1}\otimes Y^{-1})\otimes(X\otimes Y) \arrow[rr, "c\otimes id"] \arrow[dr, "t'_{X\otimes Y}"'] & & (Y^{-1}\otimes X^{-1})\otimes(X\otimes Y) \arrow[dl, "t_{X\otimes Y}"] \\ & \underline{1} & \\ (X\otimes Y)\otimes(X^{-1}\otimes Y^{-1}) \arrow[rr, "id\otimes c"] \arrow[dr, "p'_{X\otimes Y}"'] & & (X\otimes Y)\otimes(Y^{-1}\otimes X^{-1}) \arrow[dl, "p_{X\otimes Y}"] \\ & \underline{1}. & \end{tikzcd}$$

$t_{X\otimes Y}$ et $p_{X\otimes Y}$ étant donnés par la proposition 34.

<u>Démonstration</u>. – Considérons le diagramme ci-dessous dont la commutativité de la région (I) résulte de la naturalité de $a$ ; celle de (II) résulte de la proposition 34 ; celle de (III) et (IV) résulte de la naturalité de $d, g$ respectivement ; enfin celle de (V) et (VI) résulte de la commutativité des triangles (40) et de la relation $c_{Y^{-1}\otimes X^{-1}} \circ c_{X^{-1}\otimes Y^{-1}} = id_{X^{-1}\otimes Y^{-1}}$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
(X^{-1}\otimes Y^{-1})\otimes((X\otimes Y)\otimes(X^{-1}\otimes Y^{-1})) \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "c\otimes(id\otimes c)"] \arrow[dddd, bend right=60, "id\otimes p'_{X\otimes Y}"'] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{I})"] & & ((X^{-1}\otimes Y^{-1})\otimes(X\otimes Y))\otimes(X^{-1}\otimes Y^{-1}) \arrow[d, "(c\otimes id)\otimes c"] \arrow[dddd, bend left=60, "t'_{X\otimes Y}\otimes id"] \\
(Y^{-1}\otimes X^{-1})\otimes((X\otimes Y)\otimes(Y^{-1}\otimes X^{-1})) \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "id\otimes p_{X\otimes Y}"] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{II})"] & & ((Y^{-1}\otimes X^{-1})\otimes(X\otimes Y))\otimes(Y^{-1}\otimes X^{-1}) \arrow[d, "t_{X\otimes Y}\otimes id"] \\
(Y^{-1}\otimes X^{-1})\otimes 1 \arrow[dd, "c\otimes id"] \arrow[dd, phantom, bend right=50, "(\mathrm{V})"'] & & 1\otimes(Y^{-1}\otimes X^{-1}) \arrow[dd, "id\otimes c"] \arrow[dd, phantom, bend left=50, "(\mathrm{VI})"] \\
& Y^{-1}\otimes X^{-1} \arrow[ul, "d"'] \arrow[ur, "g"] \arrow[dd, "c"] \arrow[l, phantom, "(\mathrm{III})"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \\
(X^{-1}\otimes Y^{-1})\otimes 1 & & 1\otimes(X^{-1}\otimes Y^{-1}) \\
& X^{-1}\otimes Y^{-1} \arrow[ul, "d"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

On en déduit la commutativité du circuit extérieur, d'où la proposition.

## §4. ⊗-Foncteurs

### 1. Définition des ⊗-foncteurs

<u>Définition 1.</u> — Un <u>⊗-foncteur</u> d'une ⊗-catégorie $\underline{C}$ dans une ⊗-catégorie $\underline{C}'$ est un couple $(F,\breve{F})$ d'un foncteur $F : \underline{C} \to \underline{C}'$ et d'un isomorphisme fonctoriel

$$\breve{F}_{X,Y} : F(X)\otimes F(Y) \xrightarrow{\sim} F(X\otimes Y)$$

On dit que $(F,\breve{F})$ est un ⊗-foncteur <u>strict</u>, si pour tous $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, on a

$$F(X\otimes Y) = FX\otimes FY$$

$$\breve{F}_{X,Y} = id_{F(X\otimes Y)}$$

Si $(F,\breve{F})$, $(G,\breve{G})$ sont des ⊗-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$, un <u>⊗-morphisme</u> de $(F,\breve{F})$ dans $(G,\breve{G})$ est un morphisme fonctoriel $\lambda : F \to G$ rendant commutatif, pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, le carré

$$
\begin{tikzcd}
FX\otimes FY \arrow[r, "\breve{F}_{X,Y}"] \arrow[d, "\lambda_X\otimes\lambda_Y"'] & F(X\otimes Y) \arrow[d, "\lambda_{X\otimes Y}"] \\
GX\otimes GY \arrow[r, "\breve{G}_{X,Y}"] & G(X\otimes Y)
\end{tikzcd}
$$

Si de plus $\lambda$ est un isomorphisme de foncteurs on dit qu'on a un <u>$\otimes$-isomorphisme</u>. En outre, si $(H, \check{H})$ est un autre $\otimes$-foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et $\mu : G \to H$ un $\otimes$-morphisme de $(G, \check{G})$ dans $(H, \check{H})$, on vérifie aussitôt que $\mu \circ \lambda$ est aussi un $\otimes$-morphisme qu'on appelle le <u>$\otimes$-morphisme composé</u> des $\otimes$-morphismes $\lambda$ et $\mu$. On obtient ainsi une catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C}, \underline{C}')$ dont les objets sont les $\otimes$-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et les morphismes les $\otimes$-morphismes.

<u>Définition 2.</u>— Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$, $\underline{C}''$ des $\otimes$-catégories, $(F, \check{F})$ et $(F', \check{F}')$ des $\otimes$-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et de $\underline{C}'$ dans $\underline{C}''$ respectivement. Nous définissons le <u>$\otimes$-foncteur composé</u> de $(F, \check{F})$ et $(F', \check{F}')$, noté $(F', \check{F}') \circ (F, \check{F})$ ou $(F'F, \check{F'F})$, comme le couple $(F'', \check{F}'')$, où

$$F'' = F' \circ F$$

$$\check{F}'' = (F' * \check{F}) \circ (\check{F}' * (F, F))$$

c'est à dire que pour des objets $X, Y$ de $\underline{C}$, $\check{F}''_{X,Y}$ est défini par le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
F'FX \otimes F'FY \arrow[rr, "\check{F}'_{FX,FY}"] \arrow[dr, "\check{F}''_{X,Y}"'] & & F'(FX \otimes FY) \arrow[dl, "F'(\check{F}_{X,Y})"] \\
& F'F(X \otimes Y) &
\end{tikzcd}$$

En outre, si $(G, \check{G}) : \underline{C} \to \underline{C}'$, $(G', \check{G}') : \underline{C}' \to \underline{C}''$ sont aussi des $\otimes$-foncteurs, $\lambda : F \to G$, $\lambda' : F' \to G'$ des $\otimes$-morphismes, on vérifie immédiatement que $F' * \lambda$ et $\lambda' * G$ sont des $\otimes$-morphismes, d'où $\lambda' * \lambda : F'F \to G'G$ est aussi un $\otimes$-morphisme. On dispose donc d'une 2-catégorie $\otimes$-$\underline{\underline{\mathrm{Cat}}}$, ayant comme objets les $\otimes$-catégories, et comme catégories de morphismes les catégories $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C}, \underline{C}')$.

## 2. Compatibilité avec des contraintes

<u>Définition 3.</u> - Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes d'associativité $a$ et $a'$ respectivement. On dit qu'un $\otimes$-foncteur $(F, \check{F}) : \underline{C} \to \underline{C}'$ est <u>compatible</u> avec $a$, $a'$, si pour tous $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$,

le diagramme

$$
(1)\qquad
\begin{tikzcd}
FX\otimes(FY\otimes FZ) \arrow[r, "id\otimes \breve{F}_{Y,Z}"] \arrow[d, "a'"'] & FX\otimes F(Y\otimes Z) \arrow[r, "\breve{F}_{X,Y\otimes Z}"] & F(X\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[d, "Fa"] \\
(FX\otimes FY)\otimes FZ \arrow[r, "\breve{F}_{X,Y}\otimes id"] & F(X\otimes Y)\otimes FZ \arrow[r, "\breve{F}_{X\otimes Y,Z}"] & F((X\otimes Y)\otimes Z)
\end{tikzcd}
$$

est commutatif. On dit alors que $(F,\breve{F})$ est un <u>$\otimes$-foncteur associatif</u>. La sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C},\underline{C}')$ dont les objets sont les $\otimes$-foncteurs associatifs est notée $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,A}(\underline{C},\underline{C}')$.

<u>Proposition 1</u>.– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$, $\underline{C}''$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes d'associativité $a$, $a'$, $a''$ respectivement ; $(F,\breve{F}) : \underline{C}\longrightarrow\underline{C}'$, $(F',\breve{F}') : \underline{C}'\longrightarrow\underline{C}''$ des $\otimes$-foncteurs associatifs. Alors le $\otimes$-foncteur composé $(F'F, \breve{F'F})$ est aussi associatif.

<u>Démonstration</u>.– Considérons le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
F'(FX\otimes(FY\otimes FZ)) \arrow[rrrr, bend left=15, "id"] \arrow[rrrr, phantom, bend left=8, "(\mathrm{I})"] \arrow[ddd, "F'a'"'] & F'FX\otimes F'(FY\otimes FZ) \arrow[l, "\breve{F}'"'] \arrow[r, "id\otimes F'(\breve{F})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & F'FX\otimes F'F(Y\otimes Z) \arrow[r, "\breve{F}'"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & F'(FX\otimes F(Y\otimes Z)) \arrow[d, "F'(\breve{F})"] & F'(FX\otimes(FY\otimes FZ)) \arrow[l, "F'(id\otimes\breve{F})"'] \arrow[ddd, "F'a'"] \\
\arrow[d, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & F'FX\otimes(F'FY\otimes F'FZ) \arrow[u, "id\otimes\breve{F}'"] \arrow[r, "id\otimes\breve{F'F}"] \arrow[d, "a''"'] & F'FX\otimes F'F(Y\otimes Z) \arrow[r, "\breve{F'F}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F'F(X\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[d, "F'Fa"] & \arrow[d, phantom, "(\mathrm{IX})"] \\
 & (F'FX\otimes F'FY)\otimes F'FZ \arrow[r, "\breve{F'F}\otimes id"] \arrow[d, "\breve{F}'\otimes id"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & F'F(X\otimes Y)\otimes F'FZ \arrow[r, "\breve{F'F}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & F'F((X\otimes Y)\otimes Z) & \\
F'((FX\otimes FY)\otimes FZ) \arrow[rrrr, bend right=15, "id"'] \arrow[rrrr, phantom, bend right=8, "(\mathrm{VII})"'] & F'(FX\otimes FY)\otimes F'FZ \arrow[l, "\breve{F}'"'] \arrow[r, "F'(\breve{F})\otimes id"] & F'F(X\otimes Y)\otimes F'FZ \arrow[r, "\breve{F}'"] & F'(F(X\otimes Y)\otimes FZ) \arrow[u, "F'(\breve{F})"'] & F'((FX\otimes FY)\otimes FZ) \arrow[l, "F'(\breve{F}\otimes id)"']
\end{tikzcd}
$$

dans lequel la commutativité des régions (I), (VII) résulte de la fonctorialité de $\breve{F}'$ ; celle de (II), (III), (V), (VI) vient de la définition de $\breve{F'F}$ (Déf. 2) ; celle de (VIII), (IX) est le résultat de la compatibilité de $(F,\breve{F})$ et $(F',\breve{F}')$ avec les contraintes d'associativité ; enfin celle du circuit extérieur est évidente. D'où la commutativité de (IV) qui exprime que $(F'F, \breve{F'F})$ est compatible avec $a$ et $a''$.

<u>Remarque 1)</u>.– Avec la définition 3, on peut dire que deux contraintes d'associativité $a$, $a'$ sur $\underline{C}$ sont cohomologues (§2, n°1, Déf. 3).

si et seulement s'il existe un ⊗-foncteur $(F, \breve{F}) : (\underline{C}, a) \longrightarrow (\underline{C}, a')$ compatible avec $a, a'$ et tel que $F = id_{\underline{C}}$.

<u>Définition 4</u>.– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des ⊗-catégories munies des contraintes de commutativité $c$ et $c'$ respectivement. On dit qu'un ⊗-foncteur $(F, \breve{F}) : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ est <u>compatible</u> avec $c, c'$, si pour tous $X, Y \in Ob\,\underline{C}$, le diagramme

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} FX \otimes FY & \xrightarrow{\breve{F}_{X,Y}} & F(X \otimes Y) \\ {\scriptstyle c'_{FX,FY}}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle F(c_{X,Y})} \\ FY \otimes FX & \xrightarrow{\breve{F}_{Y,X}} & F(Y \otimes X) \end{array}$$

est commutatif. On dit alors que $(F, \breve{F})$ est un <u>⊗-foncteur commutatif</u>. La sous-catégorie pleine de $\underline{Hom}^{\otimes}(\underline{C}, \underline{C}')$ dont les objets sont les ⊗-foncteurs commutatifs est notée $\underline{Hom}^{\otimes, c}(\underline{C}, \underline{C}')$.

On vérifie aussitôt la proposition suivante

<u>Proposition 2</u>.– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$, $\underline{C}''$ des ⊗-catégories munies des contraintes de ~~associativité~~ commutativité $c, c', c''$ respectivement ; $(F, \breve{F}) : \underline{C} \to \underline{C}'$, $(F', \breve{F}') : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}''$ des ⊗-foncteurs commutatifs. Alors le foncteur composé $(F'F, \breve{F'F})$ est aussi commutatif.

<u>Remarque 2)</u>.– Dans le langage de la définition 4, on dit que deux contraintes de commutativité $c, c'$ sur $\underline{C}$ sont cohomologues (§2, n°2, Déf. 7) si et seulement s'il existe un ⊗-foncteur $(F, \breve{F}) : (\underline{C}, c) \longrightarrow (\underline{C}, c')$ compatible avec $c, c'$ et tel que $F = id_{\underline{C}}$.

<u>Définition 5</u>.– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des ⊗-catégories munies des contraintes d'unité $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ respectivement. On dit qu'un ⊗-foncteur $(F, \breve{F}) : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ est <u>compatible</u> avec $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ s'il existe un isomorphisme $\hat{F} : \underline{1}' \longrightarrow F(\underline{1})$ rendant commutatifs les diagrammes

$$(3) \qquad \begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{F(g_X)} & F(\underline{1} \otimes X) \\ {\scriptstyle g'_{FX}}\downarrow & & \uparrow {\scriptstyle \breve{F}_{\underline{1},X}} \\ \underline{1}' \otimes FX & \xrightarrow{\hat{F} \otimes id} & F\underline{1} \otimes FX \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{F(d_X)} & F(X \otimes \underline{1}) \\ {\scriptstyle d'_{FX}}\downarrow & & \uparrow {\scriptstyle \breve{F}_{X,\underline{1}}} \\ FX \otimes \underline{1}' & \xrightarrow{id \otimes \hat{F}} & FX \otimes F\underline{1} \end{array}$$

On dit alors que $(F, \breve{F})$ est un <u>$\otimes$-foncteur unifère</u>.

<u>Remarque 3)</u>.– L'isomorphisme $\hat{F}$ est unique. En effet, en vertu de l'existence de $\hat{F}$, on a $F(\underline{1})$ régulier puisqu'il est isomorphe à $\underline{1}'$ qui est régulier. Donc dans (3), si on remplace $X$ par $\underline{1}$, on a l'unicité de $\hat{F}$ du fait que $F(\underline{1})$ est régulier.

<u>Proposition 3</u>.– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$, $\underline{C}''$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes d'unité $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$, $(\underline{1}'', g'', d'')$ respectivement ; $(F, \breve{F}) : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$, $(F', \breve{F}') : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}''$ des $\otimes$-foncteurs unifères. Alors le $\otimes$-foncteur composé $(F'F, \breve{F'F})$ est aussi unifère.

<u>Démonstration</u>.– Soient $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F(\underline{1})$, $\hat{F}' : \underline{1}'' \xrightarrow{\sim} F'(\underline{1}')$ venant de la compatibilité de $(F, \breve{F})$, $(F', \breve{F}')$ avec les unités (Déf. 5). Définissons un isomorphisme, noté $\widehat{F'F}$, entre $\underline{1}''$ et $F'F(\underline{1})$ par le triangle commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{1}'' \arrow[dl, "\hat{F}'"'] \arrow[dr, "\widehat{F'F}"] & \\
F'\underline{1}' \arrow[rr, "F'(\hat{F})"'] & & F'F\underline{1}
\end{tikzcd}$$

Montrons qu'on a la commutativité des carrés

$$\begin{tikzcd}
F'FX \arrow[r, "F'F(g_X)"] \arrow[d, "g''_{F'FX}"'] & F'F(\underline{1}\otimes X) \\
\underline{1}''\otimes F'FX \arrow[r, "\widehat{F'F}\otimes id"] & F'F\underline{1}\otimes F'FX \arrow[u, "\breve{F'F}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F'FX \arrow[r, "F'F(d_X)"] \arrow[d, "d''_{F'FX}"'] & F'F(X\otimes\underline{1}) \\
F'FX\otimes\underline{1}'' \arrow[r, "id\otimes\widehat{F'F}"] & F'FX\otimes F'F\underline{1} \arrow[u, "\breve{F'F}"']
\end{tikzcd}$$

Nous démontrons seulement la commutativité de l'un des carrés ; la démonstration pour l'autre étant analogue. Pour cela considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & F'FX \arrow[r, "F'Fg_X"] \arrow[dl, "F'(g'_{FX})"'] \arrow[d, "g''_{F'FX}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F'F(\underline{1}\otimes X) & \\
F'(\underline{1}'\otimes FX) \arrow[r, phantom, "(\mathrm{III})"] \arrow[rrr, bend right=60, "F'(\hat{F}\otimes id_{FX})"'] & \underline{1}''\otimes F'FX \arrow[r, "\widehat{F'F}\otimes id"] \arrow[d, "\hat{F}'\otimes id"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & F'F\underline{1}\otimes F'FX \arrow[u, "\breve{F'F}"'] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{IV})"] \arrow[d, equal] & F'(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[ul, "F'(\breve{F})"'] \\
 & F'\underline{1}'\otimes F'FX \arrow[r, "F'(\hat{F})\otimes id"] \arrow[ul, "\breve{F}'"] & F'F\underline{1}\otimes F'FX \arrow[ur, "\breve{F}'"'] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{V})"] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité de la région (II) vient de la définition de $\widehat{F'F}$ ; celle de (III) et du contour extérieur est le résultat de la compatibilité de $(F,\check{F})$, $(F',\check{F}')$ avec les unités ; celle de (IV) de la définition de $\check{F'F}$, enfin celle de (V) de la fonctorialité de $F'$. D'où la commutativité de (I).

<u>Définition 6</u>.- Soient $(F,\check{F})$, $(G,\check{G})$ des $\otimes$-foncteurs unifères de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ avec $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F(\underline{1})$, $\hat{G} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} G(\underline{1})$. On dit qu'un $\otimes$-morphisme $\lambda : F \to G$ est <u>unifère</u> si le triangle

(4)
$$\begin{tikzcd}
 & F\underline{1} \arrow[dd, "\lambda_{\underline{1}}"] \\
\underline{1}' \arrow[ur, "\hat{F}"] \arrow[dr, "\hat{G}"'] & \\
 & G\underline{1}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. D'où si $\lambda$ est un $\otimes$-morphisme unifère, $\lambda_{\underline{1}}$ est un isomorphisme. La réciproque est aussi vraie.

<u>Proposition 4</u>.- Soient $(F,\check{F})$, $(G,\check{G})$ des $\otimes$-foncteurs unifères de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ avec $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F(\underline{1})$, $\hat{G} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} G(\underline{1})$ les isomorphismes de compatibilité. Un $\otimes$-morphisme $\lambda : F \to G$ tel que $\lambda_{\underline{1}}$ soit un isomorphisme est unifère.

<u>Démonstration</u>.- Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\underline{1}'\otimes F\underline{1} \arrow[r, "\hat{F}\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F\underline{1}\otimes F\underline{1} \arrow[r, "\lambda_{\underline{1}}\otimes\lambda_{\underline{1}}"] \arrow[d, "\check{F}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & G\underline{1}\otimes G\underline{1} \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & \underline{1}'\otimes G\underline{1} \arrow[l, "\hat{G}\otimes id"'] \arrow[r, "id\otimes\lambda_{\underline{1}}^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \underline{1}'\otimes F\underline{1} \\
F\underline{1} \arrow[u, "g'_{F\underline{1}}"] \arrow[r, "F(d)"'] \arrow[rrrr, bend right, "id"'] & F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[r, "\lambda_{\underline{1}\otimes\underline{1}}"'] & G(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[u, "\check{G}"'] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{V})"] & G\underline{1} \arrow[l, "G(d)"] \arrow[u, "g'_{G\underline{1}}"'] \arrow[r, "\lambda^{-1}"'] & F\underline{1} \arrow[u, "g'_{F\underline{1}}"'] \\
 & & {} & &
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (III) résulte de la compatibilité de $(F,\check{F})$, $(G,\check{G})$ avec les unités ; celle de (II) vient du fait que $\lambda$ est un $\otimes$-morphisme (n° 1, Déf. 1) ; celle de (IV) découle de la naturalité de $g'$ et celle de (V) de la naturalité de $\lambda$. D'où la commutativité du circuit extérieur qui nous donne

$$\hat{G}^{-1}\lambda_{\underline{1}}\hat{F}\otimes id_{F\underline{1}} = id_{\underline{1}'}\otimes id_{F\underline{1}}$$

ou du fait que $F\underline{1}$ est régulier

$$\hat{G}^{-1}\lambda_{\underline{1}}\hat{F} = id_{\underline{1}},$$

c'est à dire le diagramme (4) commutatif.

<u>Corollaire</u>. – Soient $(F,\check{F})$, $(G,\check{G})$ des $\otimes$-foncteurs unifères de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et $\lambda : F \to G$ un $\otimes$-isomorphisme. Alors $\lambda$ est unifère.

<u>Démonstration</u>. – En effet $\lambda_X$ est un isomorphisme pour tout $X \in Ob\,\underline{C}$, en particulier pour $X = \underline{1}$.

La sous-catégorie de $\underline{Hom}^{\otimes}(\underline{C},\underline{C}')$ ayant comme objets les $\otimes$-foncteurs unifères, comme morphismes les $\otimes$-morphismes unifères, est notée $\underline{Hom}^{\otimes,\underline{1}}(\underline{C},\underline{C}')$ (le $\otimes$-morphisme composé de deux $\otimes$-morphismes unifères est un $\otimes$-morphisme unifère)

Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories ; $(F,\check{F})$, $(G,\check{G})$ des $\otimes$-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ ; et $\alpha : F \xrightarrow{\sim} G$ un $\otimes$-isomorphisme. On a les propriétés suivantes

<u>Proposition 5</u>. – $(F,\check{F})$ est compatible avec les contraintes d'associativité $a$, $a'$ données respectivement sur $\underline{C}$, $\underline{C}'$ si et seulement si $(G,\check{G})$ l'est.

<u>Démonstration</u>. – Considérons le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
GX\otimes(GY\otimes GZ) \arrow[rr, "id\otimes\check{G}"] \arrow[dddd, "a'"'] & & GX\otimes G(Y\otimes Z) \arrow[rr, "\check{G}"] & & G(X\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[dddd, "Ga"] \\
& FX\otimes(FY\otimes FZ) \arrow[ul, "\alpha_X\otimes(\alpha_Y\otimes\alpha_Z)"'] \arrow[r, "id\otimes\check{F}"] \arrow[d, "a'"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{I})"] & FX\otimes F(Y\otimes Z) \arrow[u, "\alpha_X\otimes\alpha_{Y\otimes Z}"'] \arrow[r, "\check{F}"] \arrow[urr, phantom, "(\mathrm{II})"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & F(X\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[ur, "\alpha_{X\otimes(Y\otimes Z)}"'] \arrow[d, "Fa"] & \\
& (FX\otimes FY)\otimes FZ \arrow[r, "\check{F}\otimes id"] \arrow[ddl, "(\alpha_X\otimes\alpha_Y)\otimes\alpha_Z"] \arrow[l, phantom, "(\mathrm{VI})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F(X\otimes Y)\otimes FZ \arrow[r, "\check{F}"] \arrow[dd, "\alpha_{X\otimes Y}\otimes\alpha_Z"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & F((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[ddr, "\alpha_{(X\otimes Y)\otimes Z}"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{VII})"] & \\
& & & & \\
(GX\otimes GY)\otimes GZ \arrow[rr, "\check{G}\otimes id"'] & & G(X\otimes Y)\otimes GZ \arrow[rr, "\check{G}"'] & & G((X\otimes Y)\otimes Z)
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (II), (IV), (V) vient de ce que $\alpha$ est un $\otimes$-morphisme ; celle de VI résulte de la naturalité de $a'$ et celle de (VII) de la naturalité de $\alpha$. D'où la région (III) est commutative si et seulement si le circuit extérieur l'est, ce qui démontre.

la proposition.

<u>Proposition 6</u>.– $(F, \check{F})$ est compatible avec les contraintes de commutativité $c$, $c'$ données respectivement sur $\underline{C}$, $\underline{C}'$ si et seulement si $(G, \check{G})$ l'est.

<u>Démonstration</u>.– Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
GX \otimes GY \arrow[rrr, "\check{G}"] \arrow[ddd, "c'_{GX,GY}"'] & & & G(X \otimes Y) \arrow[ddd, "G(c_{X,Y})"] \\
& FX \otimes FY \arrow[ul, "\alpha_X \otimes \alpha_Y"'] \arrow[r, "\check{F}"] \arrow[d, "c'_{FX,FY}"'] \arrow[u, phantom, "(\mathrm{I})"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F(X \otimes Y) \arrow[ur, "\alpha_{X \otimes Y}"] \arrow[d, "F(c_{X,Y})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & \\
& FY \otimes FX \arrow[dl, "\alpha_Y \otimes \alpha_X"'] \arrow[r, "\check{F}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{II})"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & F(Y \otimes X) \arrow[dr, "\alpha_{Y \otimes X}"] & \\
GY \otimes GX \arrow[rrr, "\check{G}"] & & & G(Y \otimes X)
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (III) vient du fait de ce que $\alpha$ est un $\otimes$-morphisme et celle des régions (IV), (V) de la naturalité de $c'$ et $\alpha$ respectivement. D'où l'équivalence de la commutativité de la région (II) et du circuit extérieur.

<u>Proposition 7</u>.– $(F, \check{F})$ est compatible avec les unités $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ données respectivement sur $\underline{C}$, $\underline{C}'$ si et seulement si $(G, \check{G})$ l'est.

<u>Démonstration</u>.– En raison de la symétrie du problème, nous allons démontrer que si $(F, \check{F})$ est unifère, $(G, \check{G})$ l'est. Puisque $(F, \check{F})$ est unifère, il existe un isomorphisme $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F(\underline{1})$ tel que les diagrammes (3) soient commutatifs. Définissons $\hat{G} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} G(\underline{1})$ par le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underline{1}' \arrow[rr, "\hat{F}"] \arrow[dr, "\hat{G}"'] & & F\underline{1} \arrow[dl, "\alpha"] \\
& G\underline{1} &
\end{tikzcd}$$

et considérons le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
GX \arrow[rrr, "Gg_X"] \arrow[ddd, "g'_{GX}"'] & & & G(\underline{1}\otimes X) \\
 & FX \arrow[ul, "\alpha_X"'] \arrow[r, "Fg_X"] \arrow[d, "g'_{FX}"] \arrow[ul, phantom, "\mathrm{(I)}"] \arrow[ddl, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & F(\underline{1}\otimes X) \arrow[ur, "\alpha_{\underline{1}\otimes X}"] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{(II)}"] \arrow[ddr, phantom, "\mathrm{(V)}"] & \\
 & \underline{1}'\otimes FX \arrow[r, "\hat{F}\otimes id"'] \arrow[dl, "id\otimes\alpha_X"'] & F\underline{1}\otimes FX \arrow[u, "\check{F}"'] \arrow[dr, "\alpha_{\underline{1}}\otimes\alpha_X"] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{(III)}"] & \\
\underline{1}'\otimes GX \arrow[rrr, "\hat{G}\otimes id"'] & & & G\underline{1}\otimes GX \arrow[uuu, "\check{G}"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité de la région (I) résulte de la naturalité de $\alpha$ ; celle de (II) vient de l'hypothèse que $(F, \check{F})$ soit unifère ; celle de (III) de la définition de $\hat{G}$ ; celle de (IV) de la naturalité de $g'$ ; enfin celle de (V) du fait que $\alpha$ est un $\otimes$-morphisme. D'où la commutativité du circuit extérieur. On a ainsi démontré la commutativité de l'un des diagrammes (3), la démonstration pour celle de l'autre étant analogue.

<u>Définition 7</u>.- Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories AU et $(F, \check{F})$ un $\otimes$-foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. On dit que $F$ est <u>compatible</u> avec les contraintes AU, ou encore qu'il est un <u>$\otimes$-foncteur AU</u> s'il est un $\otimes$-foncteur associatif, unifère. On note $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, AU}(\underline{C}, \underline{C}')$ la sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C}, \underline{C}')$ ayant comme objets les $\otimes$-foncteurs AU, comme morphismes les $\otimes$-morphismes unifères.

On définit de façon analogue quand on a affaire à des contraintes mixtes AC, CU, ACU.

<u>Proposition 8</u>.- Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories AU munies des contraintes mixtes d'associativité-unité $(a, (\underline{1}, g, d))$, $(a', (\underline{1}', g', d'))$ respectivement. Soit $(F, \check{F}) : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ un $\otimes$-foncteur associatif. Alors $(F, \check{F})$ est unifère si et seulement si $F(\underline{1})$ est régulier.

<u>Démonstration</u>.- Supposons $(F, \check{F})$ unifère. Alors il existe $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F\underline{1}$, donc $F\underline{1}$ est régulier. Inversement, si $F\underline{1}$ est régulier, on peut définir un isomorphisme $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F\underline{1}$ par le diagramme commutatif suivant

$$(5)\qquad \begin{tikzcd} F\underline{1} \arrow[r, "Fg_{\underline{1}}"] \arrow[d, "g'_{F\underline{1}}"'] & F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \\ \underline{1}'\otimes F\underline{1} \arrow[r, "\hat{F}\otimes id"] & F\underline{1}\otimes F\underline{1} \arrow[u, "\check{F}"'] \end{tikzcd}$$

Il nous faut maintenant démontrer que $\hat{F}$ rend commutatifs les diagrammes (3). Pour cela, prouvons d'abord que le diagramme suivant est commutatif

$$(6)\qquad \begin{tikzcd} F\underline{1} \arrow[r, "Fd_{\underline{1}}"] \arrow[d, "d'_{F\underline{1}}"'] & F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \\ F\underline{1}\otimes\underline{1}' \arrow[r, "id\otimes\hat{F}"] & F\underline{1}\otimes F\underline{1} \arrow[u, "\check{F}"'] \end{tikzcd}$$

Or le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[r, "F(id\otimes g_{\underline{1}})"] \arrow[dddddd, bend right=70, "id"'] & F(\underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1})) \arrow[dddddd, bend left=70, "Fa"] \\ F\underline{1}\otimes F\underline{1} \arrow[u, "\check{F}"] \arrow[r, "id\otimes Fg_{\underline{1}}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{I})"] & F\underline{1}\otimes F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[u, "\check{F}"'] \\ F\underline{1}\otimes(\underline{1}'\otimes F\underline{1}) \arrow[u, "id\otimes g'_{F\underline{1}}"] \arrow[r, "id\otimes(\hat{F}\otimes id)"] \arrow[d, "a'"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{II})"] & F\underline{1}\otimes(F\underline{1}\otimes F\underline{1}) \arrow[u, "id\otimes\check{F}"'] \arrow[d, "a'"] \\ (F\underline{1}\otimes\underline{1}')\otimes F\underline{1} \arrow[r, "(id\otimes\hat{F})\otimes id"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{III})"] & (F\underline{1}\otimes F\underline{1})\otimes F\underline{1} \arrow[d, "\check{F}\otimes id"] \\ F\underline{1}\otimes F\underline{1} \arrow[u, "d'_{F\underline{1}}\otimes id"] \arrow[r, "Fd_{\underline{1}}\otimes id"] \arrow[d, "\check{F}"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F(\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes F\underline{1} \arrow[d, "\check{F}"] \\ F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[r, "F(d_{\underline{1}}\otimes id)"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{V})"] & F((\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes\underline{1}) \end{tikzcd}$$

(VI) (VII)

a les régions (I), (V) commutatives en vertu de la fonctorialité de $\check{F}$ ; la région (II) par la définition de $\hat{F}$ ; la région (III) en vertu de la fonctorialité de $a'$ ; la région (VI) et le circuit extérieur en vertu de la compatibilité entre les contraintes d'associativité et d'unité ; enfin la région (VII) en vertu de la compatibilité de $(F, \check{F})$ avec les contraintes d'associativité. On en conclut la commutativité de (IV), donc celle de (6).

Venons maintenant au diagramme

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "Fg_X"] \arrow[d, "g'_{FX}"'] & F(\underline{1}\otimes X) \\ \underline{1}'\otimes FX \arrow[r, "\hat{F}\otimes id"] & F\underline{1}\otimes FX \arrow[u, "\check{F}"'] \end{tikzcd}$$

Pour démontrer sa commutativité, considérons le diagramme suivant où le diagramme qui nous intéresse se retrouve en la région (V), à facteur régulier près,

$$\begin{tikzcd}
(F\underline{1}\otimes\underline{1}')\otimes FX \arrow[r, "(id\otimes\hat{F})\otimes id"] & (F\underline{1}\otimes F\underline{1})\otimes FX \arrow[d, "\check{F}\otimes id"] \\
F\underline{1}\otimes FX \arrow[u, "d'_{F\underline{1}}\otimes id"] \arrow[r, "Fd_{\underline{1}}\otimes id"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(I)}"] \arrow[d, "\check{F}"'] & F(\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes FX \arrow[d, "\check{F}"] \\
F(\underline{1}\otimes X) \arrow[r, "F(d_{\underline{1}}\otimes id)"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(II)}"] \arrow[d, equal] & F((\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes X) \\
F(\underline{1}\otimes X) \arrow[r, "F(id\otimes g_X)"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(III)}"] & F(\underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes X)) \arrow[u, "Fa"'] \\
F\underline{1}\otimes FX \arrow[u, "\check{F}"] \arrow[r, "id\otimes Fg_X"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(IV)}"] \arrow[d, "id\otimes g'_{FX}"'] & F\underline{1}\otimes F(\underline{1}\otimes X) \arrow[u, "\check{F}"'] \\
F\underline{1}\otimes(\underline{1}'\otimes FX) \arrow[r, "id\otimes(\hat{F}\otimes id)"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(V)}"] \arrow[uuuuu, bend left=60, "a'", "\mathrm{(VI)}"'] & F\underline{1}\otimes(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[u, "id\otimes\check{F}"'] \arrow[uuuuu, bend right=60, "a'"', "\mathrm{(VII)}"]
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme la commutativité de la région (I) résulte de celle de (6) ; celle de (II), (IV) de la fonctorialité de $\check{F}$ ; celle de (III), (VI) de la compatibilité entre les contraintes d'associativité et d'unité ; celle de (VII) de la compatibilité de $(F,\check{F})$ avec $a$, $a'$ ; enfin celle du circuit extérieur de la naturalité de $a'$. On en déduit la commutativité de (V). La démonstration de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "Fd_X"] \arrow[d, "d'_{FX}"'] & F(X\otimes\underline{1}) \\
FX\otimes\underline{1}' \arrow[r, "id\otimes\hat{F}"] & FX\otimes F\underline{1} \arrow[u, "\check{F}"']
\end{tikzcd}$$

est analogue en se servant de la commutativité de (5).

Dans ce qui suit de ce n°, $\underline{C}$, $\underline{C}'$ désignent des $\otimes$-catégories ACU et $(F,\check{F})$ un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. Nous reprenons les notions de produit canonique $\bigotimes_I X_i$, d'isomorphisme $\Psi_{I_1,I_2} : \bigotimes_I X_i \simeq (\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i)$, d'isomorphisme canonique $y : \bigotimes_{I'} X_i \simeq Y$ .... développés dans (§3, n°4).

<u>Définition 8</u>.– Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\underline{C}$ (rappellons-nous que $I$ est toujours supposé fini). Définissons un isomorphisme fonctoriel

$$f_I : \underset{I}{\otimes} FX_i \xrightarrow{\sim} F(\underset{I}{\otimes} X_i)$$

de la manière suivante

1° $I = \emptyset$, alors

$$f_I = \hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F\underline{1} \tag{7}$$

2° $I = \{\beta\}$, alors

$$f_I = id_{FX_\beta} \tag{8}$$

3° $I$ a $p>1$ éléments, alors $f_I$ est défini par récurrence sur le nombre d'éléments de $I$ par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
(\underset{I'}{\otimes} FX_i)\otimes FX_\beta \arrow[r, "f_{I'}\otimes id"] \arrow[d, equal] & F(\underset{I'}{\otimes} X_i)\otimes FX_\beta \arrow[d, "\check{F}"] \\
(\underset{I'}{\otimes} FX_i)\otimes FX_\beta \arrow[r, "f_I"] & F((\underset{I'}{\otimes} X_i)\otimes X_\beta)
\end{tikzcd} \tag{9}$$

$\beta$ étant le plus grand élément de $I$ et $I'$ l'ensemble des éléments $<\beta$ de $I$.

<u>Proposition 9</u>.– Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\underline{C}$ et $I_1, I_2$ des sous-ensembles de $I$ tels que $I = I_1 \amalg I_2$. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underset{I}{\otimes} FX_i \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] & F(\underset{I}{\otimes} X_i) \arrow[r, "F(\psi_{I_1,I_2})"] & F((\underset{I_1}{\otimes} X_i)\otimes(\underset{I_2}{\otimes} X_i)) \\
\underset{I}{\otimes} FX_i \arrow[r, "\psi'_{I_1,I_2}"] & (\underset{I_1}{\otimes} FX_i)\otimes(\underset{I_2}{\otimes} FX_i) \arrow[r, "f_{I_1}\otimes f_{I_2}"] & F(\underset{I_1}{\otimes} X_i)\otimes F(\underset{I_2}{\otimes} X_i) \arrow[u, "\check{F}"]
\end{tikzcd} \tag{10}$$

<u>Démonstration</u>.– 1° $I_1 = \emptyset$, alors (10) est le circuit extérieur du diagramme suivant dont la commutativité de la région (I) résulte de la fonctorialité de $g'$ ; celle de (II) vient de ce que $(F,\check{F})$ est unifère ; et celle de (III) est évidente. D'où la commutativité du circuit extérieur.

$$
\begin{tikzcd}
\underset{I}{\otimes} FX_i \arrow[r, "f_I"] \arrow[dd, equal] \arrow[ddr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F(\underset{I}{\otimes} X_i) \arrow[rr, "F(g_{\underset{I}{\otimes} X_i})"] \arrow[dr, "g'_{F(\underset{I}{\otimes} X_i)}"'] & & F(1 \otimes (\underset{I}{\otimes} X_i)) \\
& & \underline{1}' \otimes F(\underset{I}{\otimes} X_i) \arrow[dr, "\hat{F} \otimes id"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{II})"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & \\
\underset{I}{\otimes} FX_i \arrow[r, "g'_{\underset{I}{\otimes} FX_i}"'] & \underline{1}' \otimes (\underset{I}{\otimes} FX_i) \arrow[ur, "id \otimes f_I"] \arrow[rr, "\hat{F} \otimes f_I"'] & & F\underline{1} \otimes F(\underset{I}{\otimes} X_i) \arrow[uu, "\check{F}"']
\end{tikzcd}
$$

2° $I_2 = \emptyset$. Démonstration analogue.

3° $I_1, I_2$ sont différents de l'ensemble vide. D'abord considérons le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
\underset{I}{\otimes} FX_i \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F(\underset{I}{\otimes} X_i) \arrow[rr, "F(\Psi_{I_2, I_1})"] \arrow[d, equal] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{II})"] & & F((\underset{I_2}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_1}{\otimes} X_i)) \arrow[d, equal] \\
\underset{I}{\otimes} FX_i \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] & F(\underset{I}{\otimes} X_i) \arrow[r, "F(\Psi_{I_1, I_2})"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & F((\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i)) \arrow[r, "Fc"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F((\underset{I_2}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_1}{\otimes} X_i)) \\
\underset{I}{\otimes} FX_i \arrow[r, "\Psi'_{I_1, I_2}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & (\underset{I_1}{\otimes} FX_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} FX_i) \arrow[r, "f_{I_1} \otimes f_{I_2}"] \arrow[d, "c'"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & F(\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes F(\underset{I_2}{\otimes} X_i) \arrow[r, "c'"] \arrow[u, "\check{F}"'] \arrow[d, "c'"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & F(\underset{I_2}{\otimes} X_i) \otimes F(\underset{I_1}{\otimes} X_i) \arrow[u, "\check{F}"'] \arrow[d, equal] \\
\underset{I}{\otimes} FX_i \arrow[r, "\Psi'_{I_2, I_1}"] & (\underset{I_2}{\otimes} FX_i) \otimes (\underset{I_1}{\otimes} FX_i) \arrow[r, "f_{I_2} \otimes f_{I_1}"] & F(\underset{I_2}{\otimes} X_i) \otimes F(\underset{I_1}{\otimes} X_i) \arrow[r, equal] & F(\underset{I_2}{\otimes} X_i) \otimes F(\underset{I_1}{\otimes} X_i)
\end{tikzcd}
$$

dont la commutativité des régions (I),(VII) est évidente ; celle de (II),(V) résulte de (§3, n°4, Prop. 20) ; celle de (IV) de la compatibilité de $(F, \check{F})$ avec $c$, $c'$ ; celle de (VI) de la fonctorialité de $c'$. D'où la région (III) est commutative si et seulement si le circuit extérieur du diagramme l'est.

Revenons à la démonstration de la commutativité du diagramme (10). D'après ce que nous venons de démontrer, nous pouvons toujours supposer le plus grand élément $\beta$ de $I$ appartenant à $I_2$. Pour $I_2 = \{\beta\}$, le diagramme (10) devient

$$
\begin{tikzcd}
(\underset{I_1}{\otimes} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] & F((\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[r, equal] & F((\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta) \\
(\underset{I_1}{\otimes} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, equal] & (\underset{I_1}{\otimes} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "f_{I_1} \otimes id"] & F(\underset{I}{\otimes} X_i) \otimes FX_\beta \arrow[u, "\check{F}"']
\end{tikzcd}
$$

qui est commutatif par définition de $f_I$ (Déf. 7., Diag. (9)) ; en particulier (10) est commutatif pour I se composant de deux éléments. Démontrons la commutativité de (10) dans le cas général par récurrence sur le nombre d'éléments de I. Supposons la commutativité de (10) pour les ensembles I ayant $p-1 \geq 2$ éléments ; nous allons la démontrer pour les ensembles I ayant p éléments. Pour cela considérons le diagramme suivant ($I'$ et $I'_2$ désignent respectivement les ensembles des éléments $< \beta$ de I et $I_2$)

$$\begin{tikzcd}
(\bigotimes_{I'} FX_i)\otimes FX_\beta \arrow[r, "f_{I'}\otimes id"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F(\bigotimes_{I'} X_i)\otimes FX_\beta \arrow[r, "F(\psi_{I_1,I'_2})\otimes id"] \arrow[d, "\check F"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & F((\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{I'_2} X_i))\otimes FX_\beta \arrow[d, "\check F"] \\
(\bigotimes_{I'} FX_i)\otimes FX_\beta \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] & F((\bigotimes_{I'} X_i)\otimes X_\beta) \arrow[r, "F(\psi_{I_1,I'_2}\otimes id)"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & F(((\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{I'_2} X_i))\otimes X_\beta) \\
(\bigotimes_{I'} FX_i)\otimes FX_\beta \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] & F((\bigotimes_{I'} X_i)\otimes X_\beta) \arrow[r, "F(\psi_{I_1,I_2})"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F((\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes((\bigotimes_{I'_2} X_i)\otimes X_\beta)) \arrow[u, "Fa"'] \\
(\bigotimes_{I'} FX_i)\otimes FX_\beta \arrow[r, "\psi'_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} FX_i)\otimes(\bigotimes_{I_2} FX_i) \arrow[r, "f_{I_1}\otimes f_{I_2}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{V})"] & F(\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes F((\bigotimes_{I'_2} X_i)\otimes X_\beta) \arrow[u, "\check F"'] \\
(\bigotimes_{I'} FX_i)\otimes FX_\beta \arrow[r, "\psi'_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & (\bigotimes_{I_1} FX_i)\otimes((\bigotimes_{I'_2} FX_i)\otimes FX_\beta) \arrow[r, "f_{I_1}\otimes(f_{I'_2}\otimes id)"] \arrow[d, "a'"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & F(\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes(F(\bigotimes_{I'_2} X_i)\otimes FX_\beta) \arrow[u, "id\otimes\check F"'] \arrow[d, "a'"] \\
(\bigotimes_{I'} FX_i)\otimes FX_\beta \arrow[r, "\psi'_{I_1,I'_2}\otimes id"] & ((\bigotimes_{I_1} FX_i)\otimes(\bigotimes_{I'_2} FX_i))\otimes FX_\beta \arrow[r, "(f_{I_1}\otimes f_{I'_2})\otimes id"] & (F(\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes F(\bigotimes_{I'_2} X_i))\otimes FX_\beta \arrow[uuuuu, bend right=60, "\check F\otimes id"']
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (V) résulte de la définition de $f_I$ ; celle de (II) de la naturalité de $\check F$ ; celle de (III), (VI) de la définition de $\psi$ (§3, n°1, Déf. 4, Diag. (4)) ; celle de (VII) de la naturalité de $a'$ ; celle de (VIII) de la compatibilité de $(F, \check F)$ avec $a, a'$ ; enfin celle du circuit extérieur est donnée par l'hypothèse de récurrence. D'où la commutativité de (IV).

<u>Corollaire</u>. Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\underline{C}$, $I_1$ et $I_2$ des sous-ensembles de I tels que $I = I_1 \amalg I_2$, $I'_1$ et $I'_2$ les sous-ensembles respectivement de $I_1$ et $I_2$ des éléments $i$ tels que $X_i \neq \underline{1}$, et $I' = I'_1 \amalg I'_2$.

Soient Y, Z des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$ et $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement. On a la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
\underset{I'}{\otimes} FX_i & \xrightarrow{\psi'_{I'_1,I'_2}} & (\underset{I'_1}{\otimes} FX_i)\otimes(\underset{I'_2}{\otimes} FX_i) & \xrightarrow{f_{I'_1}\otimes f_{I'_2}} & F(\underset{I'_1}{\otimes} X_i)\otimes F(\underset{I'_2}{\otimes} X_i) & \xrightarrow{Fy\otimes Fz} & FY\otimes FZ \\
\| & & & & & & \downarrow \check{F} \\
\underset{I'}{\otimes} FX_i & \xrightarrow{f_{I'}} & F(\underset{I'}{\otimes} X_i) & \xrightarrow{F(\psi_{I'_1,I'_2})} & F((\underset{I'_1}{\otimes} X_i)\otimes(\underset{I'_2}{\otimes} X_i)) & \xrightarrow{F(y\otimes z)} & F(Y\otimes Z)
\end{array} \qquad (11)$$

$y$, $z$ étant les isomorphismes canoniques définis dans (§3, n°4, Prop. 23).

<u>Démonstration</u>.- Il suffit d'appliquer la proposition 9 et la fonctorialité de $\check{F}$.

<u>Proposition 10</u>.- Soit Y un produit d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ et soit $I'$ l'ensemble des éléments $i\in I$ tels que $X_i \neq \underline{1}$, les diagrammes suivants sont commutatifs.

$$(12)\qquad \begin{array}{ccccc}
\underset{I'}{\otimes} FX_i & \xrightarrow{f_{I'}} & F(\underset{I'}{\otimes} X_i) & \xrightarrow{Fy} & FY \\
\| & & & & \downarrow F(g_Y) \\
\underset{I'}{\otimes} FX_i & \xrightarrow{f_{I'}} & F(\underset{I'}{\otimes} X_i) & \xrightarrow{Fy'} & F(\underline{1}\otimes Y)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\underset{I'}{\otimes} FX_i & \xrightarrow{f_{I'}} & F(\underset{I'}{\otimes} X_i) & \xrightarrow{Fy} & FY \\
\| & & & & \downarrow F(d_Y) \\
\underset{I'}{\otimes} FX_i & \xrightarrow{f_{I'}} & F(\underset{I'}{\otimes} X_i) & \xrightarrow{Fy''} & F(Y\otimes\underline{1})
\end{array}$$

<u>Démonstration</u>.- La proposition résulte de (§3, n°4, Prop. 26).

<u>Proposition 11</u>.- Tout diagramme dans $\underline{C}'$ construit à l'aide de $a'$, $a'^{-1}$, $c'$, $c'^{-1}$, $g'$, $g'^{-1}$, $d'$, $d'^{-1}$, $Fa$, $Fa^{-1}$, $Fc$, $Fc^{-1}$, $Fg$, $Fg^{-1}$, $Fd$, $Fd^{-1}$, $\check{F}$, $\check{F}^{-1}$, $\hat{F}$, $\hat{F}^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$, est commutatif.

<u>Démonstration</u>.- D'abord en vertu de la commutativité des diagrammes (1), (2), (3), on peut remplacer $Fa$, $Fc$, $\hat{F}$ par $a'$, $c'$, $\check{F}$, $Fg^*$, $g'$, $Fd$, $d'$. Ensuite, au moyen des diagrammes commutatifs (11), (12), on arrive à un diagramme dans $\underline{C}'$ qui ne contient que $a'$, $a'^{-1}$, $c'$, $c'^{-1}$, $g'$, $g'^{-1}$, $d'$, $d'^{-1}$ et des identités. Or ce diagramme est commutatif en vertu de (§3, n°4, Prop. 28), on en déduit par suite la commutativité du diagramme considéré.

<u>Exemple</u>.- Le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & ((A'\otimes 1')\otimes B')\otimes (F1\otimes F(A\otimes B)) \arrow[dl, "id\otimes \check{F}"'] \arrow[dr, "id\otimes (\hat{F}^{-1}\otimes id)"] & \\
((A'\otimes 1')\otimes B')\otimes F(1\otimes (A\otimes B)) \arrow[d, "id\otimes Fa"] & & ((A'\otimes 1')\otimes B')\otimes (1'\otimes F(A\otimes B)) \arrow[d, "a'"'] \\
((A'\otimes 1')\otimes B')\otimes F((1\otimes A)\otimes B) \arrow[d, "id\otimes F(g_A\otimes id)"] & & (((A'\otimes 1')\otimes B')\otimes 1')\otimes F(A\otimes B) \arrow[d, "((d'^{-1}_A\otimes id)\otimes id)\otimes id"'] \\
((A'\otimes 1')\otimes B')\otimes F(A\otimes B) \arrow[d, "a'^{-1}\otimes \check{F}^{-1}"] & & ((A'\otimes B')\otimes 1')\otimes F(A\otimes B) \arrow[d, "d'^{-1}_{A'\otimes B'}\otimes Fc"'] \\
(A'\otimes (1'\otimes B'))\otimes (FA\otimes FB) \arrow[d, "a'"] & & (A'\otimes B')\otimes F(B\otimes A) \arrow[d, "id\otimes \check{F}^{-1}"'] \\
((A'\otimes (1'\otimes B'))\otimes FA)\otimes FB \arrow[d, "c'\otimes id"] & & (A'\otimes B')\otimes (FB\otimes FA) \arrow[d, "a'"'] \\
(FA\otimes (A'\otimes (1'\otimes B')))\otimes FB \arrow[dr, "(id\otimes (id\otimes g'_{B'}))\otimes id"] & & ((A'\otimes B')\otimes FB)\otimes FA \arrow[d, "c'"'] \\
 & (FA\otimes (A'\otimes B'))\otimes FB & FA\otimes ((A'\otimes B')\otimes FB) \arrow[l, "a'"']
\end{tikzcd}$$

On a des propositions analogues à la proposition 11 quand on a affaire à des contraintes d'associativité, commutativité, unité, ou des contraintes mixtes AC, AU, CU. Bornons-nous au cas AC, nous avons la proposition :

<u>Proposition 12</u>.- Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories AC et $(F, \check{F})$ un $\otimes$-foncteur AC de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. Tout diagramme dans $\underline{C}'$ construit à l'aide de $a'$, $a'^{-1}$, $c'$, $c'^{-1}$, $Fa$, $Fa^{-1}$, $Fc$, $Fc^{-1}$, $\check{F}$, $\check{F}^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$, est commutatif.

## §5. $\otimes$-Equivalences

### 1. Définition des $\otimes$-équivalences

<u>Définition 1.</u>– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F,\check{F})$ un $\otimes$-foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. On dit que $(F,\check{F})$ est une <u>$\otimes$-équivalence</u> si et seulement si $F$ est une équivalence.

<u>Proposition 1.</u>– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F,\check{F})$ une $\otimes$-équivalence de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. Soit $F' : \underline{C}' \to \underline{C}$ un foncteur quasi-inverse de $F$, i.e

$$F'F \xrightarrow[\sim]{\alpha} id_{\underline{C}} , \quad FF' \xrightarrow[\sim]{\alpha'} id_{\underline{C}'}$$

$\alpha$ et $\alpha'$ vérifiant les relations

$$(1) \qquad \begin{aligned} F * \alpha &= \alpha' * F \\ F' * \alpha' &= \alpha * F' \end{aligned}$$

Alors il existe un isomorphisme fonctoriel et un seul

$$\check{F}'_{X',Y'} : F'X' \otimes F'Y' \xrightarrow{\sim} F'(X' \otimes Y')$$

tel que $(F',\check{F}')$ soit un $\otimes$-foncteur et $\alpha$, $\alpha'$ des $\otimes$-morphismes.

<u>Démonstration.</u>– Supposons que $\check{F}'$ existe. Considérons le $\otimes$-foncteur composé $(FF', \check{FF'}) = (F,\check{F}) \circ (F',\check{F}')$. D'après (§4, n°1, Déf. 2), $\check{FF'}_{X',Y'}$ est défini par le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
FF'X' \otimes FF'Y' \arrow[rr, "\check{F}_{F'X',F'Y'}"] \arrow[dr, "\check{FF'}_{X',Y'}"'] & & F(F'X' \otimes F'Y') \arrow[dl, "F(\check{F}'_{X',Y'})"] \\
& FF'(X' \otimes Y') &
\end{tikzcd}$$

En exprimant que $\alpha'$ est un $\otimes$-morphisme, $\check{F}'$ doit être tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$(2) \qquad \begin{tikzcd}
F(F'X' \otimes F'Y') \arrow[r, "F(\check{F}')"] & FF'(X' \otimes Y') \arrow[d, "\alpha'_{X' \otimes Y'}"] \\
FF'X' \otimes FF'Y' \arrow[u, "\check{F}"] \arrow[r, "\alpha'_{X'} \otimes \alpha'_{Y'}"'] & X' \otimes Y'
\end{tikzcd}$$

D'où l'unicité de $\check{F}'$ puisque $F$ est pleinement fidèle. Prenons $\check{F}'$ défini par le diagramme commutatif (2). $\check{F}'$ est bien fonctoriel en $X', Y'$; et $\alpha'$ un $\otimes$-morphisme. Il nous reste à démontrer que $\alpha$ est un $\otimes$-morphisme. Or cela résulte de la proposition suivante :

<u>Proposition 2</u>.– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F, \check{F})$ et $(F', \check{F}')$ des $\otimes$-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et de $\underline{C}'$ dans $\underline{C}$ respectivement tels que

$$F'F \overset{\alpha}{\underset{\sim}{\to}} id_{\underline{C}}\ , \quad FF' \overset{\alpha'}{\underset{\sim}{\to}} id_{\underline{C}'}$$

avec $\alpha$, $\alpha'$ vérifiant les relations (1). Alors $\alpha$ est un $\otimes$-morphisme si et seulement si $\alpha'$ l'est.

<u>Démonstration</u>.– En vertu de la symétrie du problème, il nous suffit de démontrer que si $\alpha'$ est un $\otimes$-morphisme, alors $\alpha$ est aussi un $\otimes$-morphisme, c'est à dire on doit avoir le diagramme suivant commutatif

$$(3)\qquad \begin{tikzcd} F'(FX\otimes FY) \arrow[r, "F'(\check{F})"] & F'F(X\otimes Y) \arrow[d, "\alpha_{X\otimes Y}"] \\ F'FX\otimes F'FY \arrow[u, "\check{F}'"] \arrow[r, "\alpha_X\otimes\alpha_Y"] & X\otimes Y \end{tikzcd}$$

Considérons donc le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} FX\otimes FY \arrow[r, "\check{F}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F(X\otimes Y) \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & FF'F(X\otimes Y) \arrow[l, "F(\alpha_X\otimes\alpha_Y)"'] \arrow[r, "\alpha'_{F(X\otimes Y)}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & F(X\otimes Y) \\ FF'FX\otimes FF'FY \arrow[u, "F\alpha_X\otimes F\alpha_Y"] \arrow[r, "\check{F}"] & F(F'FX\otimes F'FY) \arrow[u, "F(\alpha_X\otimes\alpha_Y)"'] \arrow[r, "F(\check{F}')"] & FF'(FX\otimes FY) \arrow[u, "FF'(\check{F})"'] \arrow[r, "\alpha'_{FX\otimes FY}"] & FX\otimes FY \arrow[u, "\check{F}"'] \end{tikzcd}$$

dont la commutativité de la région (I) résulte de la fonctorialité de $\check{F}$; celle de (III) de la fonctorialité de $\alpha'$; enfin celle du circuit extérieur se déduit des relations (1) et de la commutativité du diagramme (2). D'où la commutativité de (II) qui est l'image par $F$ de (3). Or $F$ est pleinement fidèle, ce qui donne la commutativité de (3).

En vertu de la définition 1 et la proposition 1, on peut énoncer la proposition :

<u>Proposition 3</u>.– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F, \check{F})$ un $\otimes$-fonc-

teurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. $(F, \breve{F})$ est une $\otimes$-équivalence si et seulement si $(F, \breve{F})$ peut être mis dans un quadruple

$$\big((F,\breve{F}),\ (F',\breve{F}'),\ \alpha,\ \alpha'\big)$$

tel que $(F', \breve{F}')$ soit un $\otimes$-foncteur de $\underline{C}'$ dans $\underline{C}$, $\alpha : F'F \xrightarrow{\sim} id_{\underline{C}}$, $\alpha' : FF' \xrightarrow{\sim} id_{\underline{C}'}$ des $\otimes$-isomorphismes vérifiant (1). $((F,\breve{F}), (F',\breve{F}'), \alpha, \alpha')$ est appelé <u>quadruple de $\otimes$-équivalence</u> entre $\underline{C}$ et $\underline{C}'$.

Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories et $((F,\breve{F}), (F',\breve{F}'), \alpha, \alpha')$ un quadruple de $\otimes$-équivalence entre $\underline{C}$ et $\underline{C}'$. On a les propositions suivantes:

<u>Proposition 4</u>. – $(F, \breve{F})$ est compatible avec les contraintes d'associativité $a$, $a'$ données respectivement sur $\underline{C}$, $\underline{C}'$ si et seulement si $(F', \breve{F}')$ l'est.

<u>Démonstration</u>. – En raison de la symétrie du problème, il nous suffit de démontrer que si $(F', \breve{F}')$ est compatible avec $a$, $a'$, alors il en est de même de $(F, \breve{F})$, i.e le diagramme (1) dans (§4, n°2) est commutatif. Or ce diagramme se retrouve en la région (II) (à image par $F'$ près) du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
F'FX\otimes(F'FY\otimes F'FZ) \arrow[r, "id\otimes\breve{F}'"] \arrow[d, "id\otimes\breve{F}'F"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] \arrow[ddddd, bend right=60, dotted, "a"'] & F'FX\otimes F'(FY\otimes FZ) \arrow[r, "\breve{F}'"] \arrow[d, "id\otimes F'(\breve{F})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & F'(FX\otimes(FY\otimes FZ)) \arrow[ddddd, bend left=60, dotted, "F'a'"] \\
F'FX\otimes F'F(Y\otimes Z) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\breve{F}'F"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & F'FX\otimes F'F(Y\otimes Z) \arrow[d, "\breve{F}'"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F'FX\otimes F(FY\otimes FZ) \arrow[l, "id\otimes F'(\breve{F})"'] \arrow[u, "\breve{F}'"'] \arrow[d, "\breve{F}'"] \\
F'F(X\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[d, "F'Fa"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & F'(FX\otimes F(Y\otimes Z)) \arrow[l, "F'(\breve{F})"'] & F'(FX\otimes(FY\otimes FZ)) \arrow[l, "F'(id\otimes\breve{F})"'] \arrow[d, "F'a'"] \\
F'F((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & F'(F(X\otimes Y)\otimes FZ) \arrow[l, "F'(\breve{F})"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & F'((FX\otimes FY)\otimes FZ) \arrow[l, "F'(\breve{F}\otimes id)"'] \arrow[d, "F'(\breve{F}\otimes id)"] \\
F'F(X\otimes Y)\otimes F'FZ \arrow[r, equal] \arrow[u, "\breve{F}'F"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & F'F(X\otimes Y)\otimes F'FZ \arrow[r, "\breve{F}'"] \arrow[u, "\breve{F}'"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IX})"] & F'(F(X\otimes Y)\otimes FZ) \\
(F'FX\otimes F'FY)\otimes F'FZ \arrow[r, "\breve{F}'\otimes id"] \arrow[u, "\breve{F}'F\otimes id"] & F'(FX\otimes FY)\otimes F'FZ \arrow[r, "\breve{F}'"] \arrow[u, "F'(\breve{F})\otimes id"'] & F'((FX\otimes FY)\otimes FZ) \arrow[u, "F(\breve{F}\otimes id)"']
\end{tikzcd}$$

(X) (XI)

dans lequel la commutativité des régions (I), (III), (VI), (VIII) résulte de la définition de $\breve{F'F}$ ; celle de (II), (VII), (XI) est évidente ; celle de (IV), (IX) vient de la fonctorialité de $\breve{F}'$ ; celle de (X) s'obtient en appliquant (§4, n°2, Prop. 5) au ⊗-foncteur $(F'F, \breve{F'F})$ isomorphe au ⊗-foncteur $(id_{\underline{C}}, id)$ compatible avec les contraintes d'associativité égales à $a$, par le ⊗-isomorphisme $\alpha$ ; enfin celle du circuit extérieur résulte de l'hypothèse. On en déduit la commutativité de la région (V), d'où celle de (1) dans (§4, n°2) puisque $F'$ est pleinement fidèle.

<u>Proposition 5.</u> – $(F, \breve{F})$ est compatible avec les contraintes de commutativité $c, c'$ données respectivement sur $\underline{C}, \underline{C}'$ si et seulement si $(F', \breve{F}')$ l'est.

<u>Démonstration.</u> – De la même manière que dans la proposition 4, nous considérons le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
F'FX \otimes F'FY \arrow[d, "\breve{F}'"'] \arrow[r, equal] \arrow[ddd, bend right=70, "c"', "(\mathrm{IV})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F'FX \otimes F'FY \arrow[d, "\breve{F'F}"] \arrow[ddd, bend left=70, "c", "(\mathrm{V})"'] \\
F'(FX \otimes FY) \arrow[r, "F'(\breve{F})"] \arrow[d, "F'c'"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & F'F(X \otimes Y) \arrow[d, "F'Fc"] \\
F'(FY \otimes FX) \arrow[r, "F'(\breve{F})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & F'F(Y \otimes X) \\
F'FY \otimes F'FX \arrow[u, "\breve{F}'"] \arrow[r, equal] & F'FY \otimes F'FX \arrow[u, "\breve{F'F}"']
\end{tikzcd}
$$

où la commutativité des régions (I), (III) résulte de la définition de $\breve{F'F}$ ; celle de (V) de l'application de (§4, n°2, Prop. 6) au ⊗-isomorphisme $\alpha : F'F \xrightarrow{\sim} id_{\underline{C}}$ ; d'où la proposition.

<u>Proposition 6.</u> – $(F, \breve{F})$ est compatible avec les unités $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ données respectivement sur $\underline{C}, \underline{C}'$ si et seulement si $(F', \breve{F}')$ l'est.

<u>Démonstration.</u> – Toujours par raison de symétrie, nous démontrons seulement que si $(F', \breve{F}')$ est compatible avec les unités considérées, il en est de même de $(F, \breve{F})$. D'abord nous définissons $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F\underline{1}$

(4)
$$\begin{tikzcd}
\underline{1}' \arrow[r, "\hat{F}"] & F\underline{1} \arrow[d, equal] \\
FF'\underline{1}' \arrow[u, "\alpha'_{\underline{1}'}"] & F\underline{1} \arrow[l, "F(\hat{F}')"']
\end{tikzcd}$$

Nous devons maintenant démontrer la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "g'_{FX}"] \arrow[d, "F(g_X)"'] & \underline{1}'\otimes FX \arrow[d, "\hat{F}\otimes id"] \\
F(\underline{1}\otimes X) & F\underline{1}\otimes FX \arrow[l, "\check{F}"']
\end{tikzcd}$$

Pour cela, considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\underline{1}\otimes X & F'F(\underline{1}\otimes X) \arrow[l, "\alpha'_{\underline{1}\otimes X}"'] & F'(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[l, "F'(\check{F})"'] \arrow[r, equal] & F'(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[r, equal] \arrow[d, "F'(F(\hat{F}')\otimes id)"] & F'(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[u, "g_X"] \arrow[d, "g_X"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{I}"] & F'FX \arrow[l, "\alpha_X"'] \arrow[r, "F'(g'_{FX})"] \arrow[u, "F'F(g_X)"'] \arrow[d, "g_{F'FX}"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{II}"] & F'(\underline{1}'\otimes FX) \arrow[u, "F'(\hat{F}\otimes id)"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{III}"] & F'(FF'\underline{1}'\otimes FX) \arrow[l, "F'(\alpha'_{\underline{1}'}\otimes id)"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{IV}"] & F'(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[l, "F'(F(\hat{F}')\otimes id)"'] \\
\underline{1}\otimes X \arrow[d, equal] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{V}"] & \underline{1}\otimes F'FX \arrow[l, "id\otimes\alpha_X"'] \arrow[r, "\hat{F}'\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\alpha_X"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{VI}"] & F'\underline{1}'\otimes F'FX \arrow[u, "\check{F}'"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{VII}"] & F'FF'\underline{1}'\otimes F'FX \arrow[l, "F'(\alpha'_{\underline{1}'})\otimes id"'] \arrow[u, "\check{F}'"'] \arrow[d, "\alpha_{F'\underline{1}'}\otimes\alpha_X"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{VIII}"] & F'F\underline{1}\otimes F'FX \arrow[l, "F'F(\hat{F}')\otimes id"'] \arrow[u, "\check{F}'"'] \arrow[d, "\alpha_{\underline{1}}\otimes\alpha_X"] \\
\underline{1}\otimes X \arrow[r, equal] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{IX}"] & \underline{1}\otimes X \arrow[r, equal] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{X}"] & \underline{1}\otimes X \arrow[r, "\hat{F}'\otimes id"] \arrow[u, "\hat{F}'\otimes\alpha_X^{-1}"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{XI}"] & F'\underline{1}'\otimes X \arrow[ur, phantom, "\mathrm{XII}"] & \underline{1}\otimes X \arrow[l, "\hat{F}'\otimes id"']
\end{tikzcd}$$

où nous avons immédiatement la commutativité des régions (IX), (IX), (X). Pour les autres régions, la commutativité de (I), (XII) découle de la naturalité de $\alpha$ ; celle de (III) résulte de la définition de $\hat{F}$ (Diag. (4)) ; celle de (V) de la naturalité de $g$ ; celle de (VI) de l'hypothèse ; celle de (VII), (VIII) de la naturalité de $\check{F}'$ ; celle de (XI) de l'égalité $F'\alpha'_{\underline{1}'} = \alpha_{F'\underline{1}'}$ (For. (1)) ; enfin celle du circuit extérieur vient du fait que $\alpha$ est un $\otimes$-morphisme (Diag. (3)). D'où la commutativité de la région (II) qui est l'image par $F'$ du diagramme dont nous voulons démontrer la commutativité. On a la proposition en tenant compte du fait que $F'$ est pleinement fidèle, la démonstration pour $d_X$, $d'_{FX}$ étant analogue.

<u>Définition 2</u>.- Soit $(F,\check{F}) : \underline{C} \to \underline{C}'$ un $\otimes$-foncteur avec F pleinement fidèle d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie $\underline{C}'$ munie d'une contrainte d'associativité $a'$ (resp. commutativité $c'$). Le diagramme commutatif (1) du (§4, n°2) (resp. le diagramme commutatif (2) du (§4, n°2)) montre qu'il existe sur $\underline{C}$ une et une seule contrainte d'associativité (resp. commutativité) compatible avec $(F,\check{F})$ et $a'$ (resp. $c'$). On l'appelle contrainte d'associativité (resp. commutativité) <u>induite</u> par $(F,\check{F})$, et on la note $F^*a'$ (resp. $F^*c'$).

<u>Proposition 7</u>.- Soient $(F,\check{F}), (G,\check{G}) : \underline{C} \to \underline{C}'$ des $\otimes$-foncteurs avec F, G pleinement fidèles, et soit $\alpha : F \xrightarrow{\sim} G$ un $\otimes$-isomorphisme. Soit $a'$ (resp. $c'$) une contrainte d'associativité (resp. commutativité) sur $\underline{C}'$. Alors $F^*a' = G^*a'$ (resp. $F^*c' = G^*c'$).

<u>Démonstration</u>.- En vertu de la définition 2, on a $(F,\check{F})$ compatible avec les contraintes d'associativité $F^*a'$, $a'$ (resp. avec les contraintes de commutativité $F^*c'$, $c'$). Or $(G,\check{G})$ est aussi compatible avec les contraintes d'associativités $F^*a'$, $a'$ (resp. avec les contraintes de commutativité $F^*c'$, $c'$) (§4, n°2, Prop. 5 (resp. Prop. 6)). D'où $F^*a' = G^*a'$ (resp. $F^*c' = G^*c'$) en vertu de l'unicité de $G^*a'$ (resp. $G^*c'$).

<u>Proposition 8.</u>– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $((F,\check{F}),(F',\check{F}'),\alpha,\alpha')$ un quadruple de $\otimes$-équivalence entre $\underline{C}$ et $\underline{C}'$. Les applications

$$a' \longmapsto F^*(a') \quad (\text{resp. } c' \longmapsto F^*(c'))$$
$$a \longmapsto F'^*(a) \quad (\text{resp. } c \longmapsto F'^*(c))$$

entre l'ensemble des contraintes d'associativité (resp. commutativité) sur $\underline{C}$ et l'ensemble des contraintes d'associativité (resp. commutativité) sur $\underline{C}'$ sont inverses l'une de l'autre.

<u>Démonstration.</u>– Posons $a = F^*(a')$ (resp. $c = F^*(c')$), on a $(F,\check{F})$ compatible avec les contraintes d'associativité (resp. commutativité) $a, a'$ (resp. $c, c'$), d'où $(F',\check{F}')$ aussi (Prop. 4). Par conséquent $F'^*(a) = a'$ (resp. $F'^*(c) = c'$). Inversement, posons $a' = F'^*(a)$ (resp. $c' = F'^*(c)$). On a $(F',\check{F}')$ compatible avec les contraintes d'associativité (resp. commutativité) $a, a'$ (resp. $c, c'$) ; il en est de même donc de $(F,\check{F})$. D'où $a = F^*(a')$ (resp. $c = F^*(c')$).

<u>Proposition 9.</u>– Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $((F,\check{F}),(F',\check{F}'),\alpha,\alpha')$ un quadruple de $\otimes$-équivalence entre $\underline{C}$ et $\underline{C}'$. Soit $(\underline{1}, g, d)$ une unité pour $\underline{C}$. Alors $(\underline{1}' = F\underline{1}, g', d')$ avec $g'$, $d'$ définis par les diagrammes commutatifs

$$(5)\qquad \begin{tikzcd} FF'X' \arrow[r, "F(g_{F'X'})"] \arrow[d, "\alpha'_{X'}"'] & F(\underline{1}\otimes F'X') & F\underline{1}\otimes FF'X' \arrow[l, "\check{F}"'] \arrow[d, "id\otimes\alpha'_{X'}"] \\ X' \arrow[rr, "g'_{X'}"] & & F\underline{1}\otimes X' \end{tikzcd}$$

$$(6)\qquad \begin{tikzcd} FF'X' \arrow[r, "F(d_{F'X'})"] \arrow[d, "\alpha'_{X'}"'] & F(F'X'\otimes\underline{1}) & FF'X'\otimes F\underline{1} \arrow[l, "\check{F}"'] \arrow[d, "\alpha'_{X'}\otimes id"] \\ X' \arrow[rr, "d'_{X'}"] & & X'\otimes F\underline{1} \end{tikzcd}$$

est une unité pour $\underline{C}'$, et $(F,\check{F})$ est compatible avec $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$.

<u>Démonstration.</u>– Nous allons d'abord démontrer $g'_{\underline{1}} = d'_{\underline{1}}$. Pour cela, considérons d'abord le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \underline{1} \arrow[d, "d_{\underline{1}}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F'F\underline{1} \arrow[l, "\alpha_{\underline{1}}"'] \arrow[r, "g_{F'F\underline{1}}"] \arrow[d, "d_{F'F\underline{1}}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1}\otimes F'F\underline{1} \arrow[d, "id\otimes\alpha_{\underline{1}}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F'F\underline{1} \arrow[l, "g_{F'F\underline{1}}"'] \arrow[d, "\alpha_{\underline{1}}"] \\ \underline{1}\otimes\underline{1} & F'F\underline{1}\otimes\underline{1} \arrow[l, "\alpha_{\underline{1}}\otimes id"] \arrow[r, "\alpha_{\underline{1}}\otimes id"'] \arrow[ur, "\alpha_{\underline{1}}\otimes\alpha_{\underline{1}}^{-1}"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{III})", shift left=3] & \underline{1}\otimes\underline{1} & \underline{1} \arrow[l, "g_{\underline{1}}"] \end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (IV) résulte de la naturalité de d, g respectivement ; celle de (III) est évidente ; enfin celle du circuit extérieur découle de la relation $d_{\underline{1}} = g_{\underline{1}}$. D'où la commutativité de (II).

Ensuite considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
FF'F\underline{1} \arrow[r, "F(g_{F'F\underline{1}})"] \arrow[d, "F(d_{F'F\underline{1}})"'] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "(\mathrm{I})"] & F(\underline{1}\otimes F'F\underline{1}) \arrow[d, phantom, "(\mathrm{II})"] & F\underline{1}\otimes FF'F\underline{1} \arrow[l, "\check{F}"'] \arrow[d, "id\otimes\alpha'_{F\underline{1}}"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "(\mathrm{III})"] \\
F(F'F\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[ur, "F(\alpha_{\underline{1}}\otimes\alpha_{\underline{1}}^{-1})"] & FF'F\underline{1}\otimes F\underline{1} \arrow[l, "\check{F}"'] \arrow[r, "\alpha'_{F\underline{1}}\otimes id"] \arrow[ur, "F\alpha_{\underline{1}}\otimes F\alpha_{\underline{1}}^{-1}"] & F\underline{1}\otimes F\underline{1}
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité de la région (I) est établie ci-dessus ; celle de (II) résulte de la fonctorialité de $\check{F}$ et celle de (III) des relations (4). On en déduit la commutativité du circuit extérieur qui, d'après la définition de $g'$, $d'$ par les diagrammes commutatifs (5) et (6), nous donne $g'_{\underline{1}} = d'_{\underline{1}}$.

Démontrons maintenant que $(F, \check{F})$ est compatible avec $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$. Nous démontrons seulement la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "F(g_X)"] \arrow[d, "g'_{FX}"'] & F(\underline{1}\otimes X) \\
\underline{1}'\otimes FX \arrow[r, "\hat{F}\otimes id"] & F\underline{1}\otimes FX \arrow[u, "\check{F}"']
\end{tikzcd}$$

où $\hat{F} = id_{F\underline{1}}$, la démonstration pour $d_X$, $d'_{FX}$ étant semblables. Pour cela, considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "F(g_X)"] \arrow[d, "\alpha'^{-1}_{FX}"'] \arrow[dddd, bend right=60, "g'_{FX}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F(\underline{1}\otimes X) \arrow[d, "F(id\otimes\alpha_X^{-1})"] \\
FF'FX \arrow[r, "F(g_{F'FX})"] \arrow[d, "F(g_{F'FX})"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & F(\underline{1}\otimes F'FX) \arrow[d, equal] \\
F(\underline{1}\otimes F'FX) \arrow[r, equal] \arrow[l, phantom, "(\mathrm{V})"] & F(\underline{1}\otimes F'FX) \arrow[r, phantom, "(\mathrm{VI})"] & {} \\
F\underline{1}\otimes FF'FX \arrow[r, equal] \arrow[u, "\check{F}"] \arrow[d, "id\otimes\alpha'_{FX}"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{III})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F\underline{1}\otimes FF'FX \arrow[u, "\check{F}"'] \arrow[d, "id\otimes F\alpha_X"] \\
F\underline{1}\otimes FX \arrow[r, equal] & F\underline{1}\otimes FX \arrow[uuuu, bend right=60, "\check{F}"']
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité de la région (I) résulte des relations (1) et de la naturalité de $g$ ; celle de (II), (III) est évidente ; celle de (IV) découle de (1) ; celle de (V) de la définition de $g'$ par le diagramme commutatif (5) ; celle de (VI) de la fonctorialité de $\check{F}$. D'où la commutativité du circuit extérieur qui est celle voulue.

2. Transport de structures.

Définition 3.– Soient $F : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ une équivalence de catégories et $F' : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ un quasi-inverse de $F$. On a $F'F \xrightarrow[\sim]{\alpha} id_{\underline{C}}$, $FF' \xrightarrow[\sim]{\alpha'} id_{\underline{C}'}$, avec $\alpha, \alpha'$ vérifiant les relations (1) du n°1. Supposons que $\underline{C}$ soit munie d'une structure ⊗. Définissons une loi ⊗ sur $\underline{C}'$ en posant

$$(7)\qquad \begin{aligned} X'\otimes Y' &= F(F'X'\otimes F'Y') \\ u'\otimes v' &= F(F'u'\otimes F'v') \end{aligned}$$

pour $X', Y' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$ et $u', v' \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}'$. On dit que la loi ⊗ définie par les formules (7) est obtenue par transport de la loi ⊗ dans $\underline{C}$ au moyen de $(F, F', \alpha, \alpha')$.

Proposition 10.– Les hypothèses étant celles de la définition 3 et la loi ⊗ sur $\underline{C}'$ celle par transport au moyen de $(F, F', \alpha, \alpha')$, il existe des isomorphismes fonctoriels

$$FX \otimes FY \xrightarrow{\check{F}} F(X\otimes Y)$$

$$F'X' \otimes F'Y' \xrightarrow{\check{F}'} F'(X'\otimes Y')$$

tels que $\alpha, \alpha'$ soient des ⊗-morphismes.

Démonstration.– Supposons qu'il existe $\check{F}$ et $\check{F}'$ tels que $\alpha, \alpha'$ soient des ⊗-morphismes. Nous devons donc avoir la commutativité du diagramme (2) (n°1) qui exprime que $\alpha'$ est un ⊗-morphisme. En vertie de (7) nous avons $F'(X'\otimes Y') = F'F(F'X'\otimes F'Y')$. Pour cette raison, posons

$$\check{F}'_{X',Y'} = \alpha^{-1}_{F'X'\otimes F'Y'} : F'X'\otimes F'Y' \longrightarrow F'(X'\otimes Y')$$

ce qui donne, compte tenu des relations (1) et (7)

$$F(\check{F}'_{X',Y'}) = F(\alpha^{-1}_{F'X'\otimes F'Y'}) = \alpha'^{-1}_{F(F'X'\otimes F'Y')} = \alpha'^{-1}_{X'\otimes Y'}$$

Par suite, pour avoir le diagramme (2) commutatif, nous devons poser

$$\check{F}_{F'X',F'Y'} = \alpha'_{X'}\otimes\alpha'_{Y'}$$

ou

$$\check{F}_{F'X',F'Y'} = F(F'\alpha'_{X'}\otimes F'\alpha'_{Y'})$$

compte tenu de (7). Il nous reste à définir $\check{F}_{X,Y}$, pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
FF'FX\otimes FF'FY \arrow[r, "F\alpha_X\otimes F\alpha_Y"] \arrow[d, "\check{F}_{F'FX,F'FY}"'] & FX\otimes FY \arrow[d, "\check{F}_{X,Y}"] \\
F(F'FX\otimes F'FY) \arrow[r, "F(\alpha_X\otimes\alpha_Y)"] & F(X\otimes Y)
\end{tikzcd}$$

ce qui donne

$$\check{F}_{X,Y} = F(\alpha_X\otimes\alpha_Y)(\alpha'_{FX}\otimes\alpha'_{FY})(F\alpha^{-1}_X\otimes F\alpha^{-1}_Y)$$

ou, compte tenu de (1)

$$\check{F}_{X,Y} = F(\alpha_X\otimes\alpha_Y)$$

Donc, en appliquant la proposition 2, on peut conclure qu'avec

$$(8)\qquad \check{F}_{X,Y} = F(\alpha_X\otimes\alpha_Y)\,,\quad \check{F}'_{X',Y'} = \alpha^{-1}_{F'X'\otimes F'Y'}$$

$\alpha$, $\alpha'$ sont des $\otimes$-morphismes, ce qui achève la démonstration.

# Chapitre II

# Gr-catégories et Pic-catégories

## §1 Gr-catégories

### 1. Définition des Gr-catégories.

Définition 1.- Une Gr-catégorie $\underline{P}$ est une $\otimes$-catégorie AU (Chap. I,
§3, n°2, Déf. 5), dont tous les objets sont inversibles (Chap. I, §3, n°5,
Déf. 9), et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, i.e toutes
les flèches sont des isomorphismes. Il résulte de la définition que tous
les objets de $\underline{P}$ sont réguliers (Chap. I, §3, n°5, Prop. 18).

Proposition 1.- Soient $\underline{P}$, $\underline{P}'$ des Gr-catégories et $(F, \breve{F}) : \underline{P} \to \underline{P}'$
un $\otimes$-foncteur associatif. Alors $(F, \breve{F})$ est unifère.

Démonstration.- On a aussitôt la proposition en remarquant
que $F(\underline{1})$ est régulier, $\underline{1}$ étant l'objet unité de $\underline{P}$, et en appliquant la
proposition 8 du (Chap. I, §4, n°2).

Proposition 2.- Soient $\underline{P}$ une Gr-catégorie, $\underline{P}'$ une $\otimes$-catégorie
AU, $\underline{1}$ et $\underline{1}'$ les objets unités de $\underline{P}$ et $\underline{P}'$ respectivement. Soit $(F, \breve{F}) : \underline{P} \to \underline{P}'$
une $\otimes$-équivalence telle qu'on ait $F\underline{1} \simeq \underline{1}'$. Alors $\underline{P}'$ est une Gr-catégorie.

Démonstration.- D'abord toutes les flèches de $\underline{P}'$ sont des isomorphismes en vertu du fait que toutes les flèches de $\underline{P}$ sont des isomorphismes et F est une équivalence.

Montrons maintenant que tous les objets de $\underline{P}'$ sont inversibles.
Soit Y un objet de $\underline{P}'$. Puisque F est une équivalence, il existe $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$
tel que $Y \simeq FX$. $\underline{P}$ est une Gr-catégorie, ses objets sont donc inversibles,
par conséquent il existe $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ tel que $X' \otimes X \simeq X \otimes X' \simeq \underline{1}$ (Chap. I,
§3, n°5, Cor de la Prop. 17). Nous avons

$$FX' \otimes Y \simeq FX' \otimes FX \overset{\check F}{\simeq} F(X' \otimes X) \simeq F\underline{1} \simeq \underline{1}'$$

$$Y \otimes FX' \simeq FX \otimes FX' \overset{\check F}{\simeq} F(X \otimes X') \simeq F\underline{1} \simeq \underline{1}'$$

Ce qui prouve bien que $Y$ est inversible.

2. Premiers invariants d'une Gr. catégorie.

Définition 2.- Soit $\underline{P}$ une Gr. catégorie. Nous poserons par la suite :

$\Pi_0(\underline{P})$ = ensemble des classes à isomorphisme près d'objets de $\underline{P}$,

$\Pi_1(\underline{P})$ = Aut $(\underline{1})$.

$\Pi_0(\underline{P})$ muni de la loi de composition, qu'on note multiplicativement, induite par l'opération $\otimes$, est un groupe, l'élément unité $1$ étant la classe des objets isomorphes à $\underline{1}$. Ainsi, on vient d'attacher à une Gr. catégorie $\underline{P}$, des groupes $\Pi_0(\underline{P})$, $\Pi_1(\underline{P})$, où $\Pi_1(\underline{P})$ est commutatif (Chap. I, §2, n°3, Prop. 7). La loi de composition de $\Pi_1(\underline{P})$ est notée désormais additivement.

Exemples.- Soit $G$ un groupoïde, et posons $\underline{P}$ = $\underline{\text{Aut}}(G)$. Alors $\underline{P}$ est de façon naturelle une Gr. catégorie, la loi $\otimes$ étant donnée par la composition des foncteurs. On pourrait appeler $\Pi_0(\underline{P})$ le groupe des automorphismes extérieurs de $G$, et $\Pi_1(\underline{P})$ le centre de $G$.

On a les propositions suivantes pour une Gr. catégorie $\underline{P}$.

Proposition 3.- Les homomorphismes $\gamma_X$ et $\delta_X$ définis dans (Chap. I, §2, n° 3, Prop. 8) sont des isomorphismes.

Démonstration.- Résultat immédiat de ce que $X$ est régulier.

Proposition 4.- Soit $\underline{Q}$ une composante connexe de $\underline{P}$. Les applications

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} \text{Aut}(\underline{1}) &\longrightarrow \text{Aut}(id_{\underline{Q}}) \\ u &\longmapsto (\gamma_X u)_{X \in \text{Ob}\,\underline{Q}} \end{aligned}$$

et

(2) $$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(\underline{1}) &\longrightarrow \mathrm{Aut}(id_{\underline{Q}}) \\ u &\longmapsto (\delta_X u)_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}} \end{aligned}$$

sont des isomorphismes.

<u>Démonstration</u>.— En vertu de (Chap. I, §2, n°3, Prop. 10) et de la proposition 3, les applications (1) et (2) sont des homomorphismes injectifs. Démontrons que (1) est aussi surjective, l'assertion analogue pour (2) étant démontrée de façon semblable. Soit $\tau = (\tau_X)_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}}$ un élément de $\mathrm{Aut}(id_{\underline{Q}})$ et soit $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}$. Puisque $\underline{Q}$ est connexe, il existe une flèche $f : X \longrightarrow Y$. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\underline{1}\otimes X \arrow[r, "\gamma_X^{-1}(\tau_X)\otimes id"] \arrow[dddddd, bend right, "id\otimes f"'] \arrow[dddddd, phantom, bend right=20, "(\mathrm{V})"] & \underline{1}\otimes X \arrow[dddddd, bend left, "id\otimes f"] \arrow[dddddd, phantom, bend left=20, "(\mathrm{VI})"] \\
X \arrow[u, "g_X"] \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "f"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{I})"] & X \arrow[u, "g_X"'] \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "\tau_Y"] \arrow[d, "g_Y"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{II})"] & Y \arrow[d, "g_Y"] \\
\underline{1}\otimes Y \arrow[r, "\gamma_Y^{-1}(\tau_Y)\otimes id"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{III})"] & \underline{1}\otimes Y \\
\underline{1}\otimes X \arrow[u, "id\otimes f"] \arrow[r, "\gamma_Y^{-1}(\tau_Y)\otimes id"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \underline{1}\otimes X \arrow[u, "id\otimes f"']
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I) et (III) résulte de la définition de $\gamma$ ; celle de (II) de la fonctorialité de $\tau$ ; celle de (V) et (VI) de la naturalité de $g$ ; enfin celle de (IV) est évidente. D'où la commutativité du circuit extérieur qui donne

(3) $$\gamma_X^{-1}(\tau_X) = \gamma_Y^{-1}(\tau_Y)$$

en vertu du fait que $X$ est régulier. Posons $u = \gamma_X^{-1}(\tau_X) = \gamma_Y^{-1}(\tau_Y)$, nous avons bien $\tau = (\gamma_X(u))_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}}$, ce qui montre que l'application (1) est surjective. Par le même raisonnement, on obtient

(4) $$\delta_X^{-1}(\tau_X) = \delta_Y^{-1}(\tau_Y)$$

ce qui donne (2) surjective.

<u>Corollaire</u>.– Soient $X, Y \in s$ avec $s \in \Pi_0(\underline{P})$. On a

$$(5) \qquad \gamma_X^{-1}\delta_X(u) = \gamma_Y^{-1}\delta_Y(u)$$

$$(6) \qquad \delta_X^{-1}\gamma_X(u) = \delta_Y^{-1}\gamma_Y(u)$$

pour tout $u \in \mathrm{Aut}(\underline{1}) = \Pi_1(\underline{P})$.

<u>Démonstration</u>.– Posons

$$(\tau_X)_{X\in s} = (\delta_X u)_{X\in s} \quad (\text{resp. } (\tau_X)_{X\in s} = (\gamma_X u)_{X\in s})$$

et appliquons la formule (3) (resp. (4)), on obtient (5) (resp. (6)).

<u>Proposition 5</u>.– L'action de $\Pi_0(\underline{P})$ sur $\Pi_1(\underline{P})$ définie par la relation

$$(7) \qquad su = \gamma_X^{-1}\delta_X(u) \quad ; \; X \in s,\; s \in \Pi_0(\underline{P}),\; u \in \Pi_1(\underline{P})$$

possède les propriétés suivantes :

(i) $s(u_1 + u_2) = su_1 + su_2$,

(ii) $(ss')u = s(s'u)$,

(iii) $1u = u$;

i.e. le groupe abélien $\Pi_1(\underline{P})$ muni de l'action (7) est un $\Pi_0(\underline{P})$-module à gauche.

<u>Démonstration</u>.– (i) Nous avons

$$s(u_1+u_2) = \gamma_X^{-1}\delta_X(u_1+u_2) = \gamma_X^{-1}(\delta_X u_1 + \delta_X u_2) = \gamma_X^{-1}\delta_X u_1 + \gamma_X^{-1}\delta_X u_2 = su_1 + su_2$$

en appliquant la formule (7) et la proposition 3.

(ii) Soient $X \in s$, $X' \in s'$, d'où $X\otimes X' \in ss'$. Par suite en appliquant la formule (7) et les formules (28), (29), (30) dans (Chap. I, §3, n°2, Prop. 17), nous obtenons

$$(ss')u = \gamma_{X\otimes X'}^{-1}\delta_{X\otimes X'}(u) = \gamma_{X\otimes X'}^{-1}(id_X \otimes \delta_{X'}u) = \gamma_{X\otimes X'}^{-1}(id_X \otimes \gamma_{X'}\gamma_{X'}^{-1}\delta_{X'}u) =$$

$$= \gamma_{X\otimes X'}^{-1}(id_X \otimes \gamma_{X'}(s'u)) = \gamma_{X\otimes X'}^{-1}(\delta_X(s'u)\otimes id_{X'}) = \gamma_{X\otimes X'}^{-1}(\gamma_X\gamma_X^{-1}\delta_X(s'u)\otimes id_{X'}),$$

$$= \gamma^{-1}_{X\otimes X'}(\gamma_X(s(s'u))\otimes id_{X'}) = \gamma^{-1}_{X\otimes X'}\gamma_{X\otimes X'}(s(s'u)) = s(s'u).$$

(iii) Compte tenu de la relation (9) dans (Chap. I, §2, n°3, Prop. 8), nous avons

$$1u = \gamma^{-1}_{\underline{1}}\delta_{\underline{1}}(u) = u.$$

Par une démonstration analogue nous obtenons:

<u>Proposition 6</u>.– L'action de $\Pi_0(\underline{P})$ sur $\Pi_1(\underline{P})$ définie par la relation

$$(8) \qquad uS = \delta^{-1}_X\gamma_X(u) \quad ; \quad X\in S,\ S\in\Pi_0(\underline{P}),\ u\in\Pi_1(\underline{P})$$

possède les propriétés suivantes :

(i) $(u_1+u_2)S = u_1S + u_2S$,

(ii) $u(SS') = (uS)S'$,

(iii) $u1 = u$ ;

i.e $\Pi_1(\underline{P})$ muni de l'action (8) est un $\Pi_0(\underline{P})$-module à droite.

Dire que
$uS =$ c'est !

<u>Remarque</u>.– Soit $\underline{P}_0$ la composante connexe de $1\in\Pi_0(\underline{P})$, i.e la sous-catégorie pleine de $\underline{P}$ des objets isomorphes à $\underline{1}$ : on voit alors que $\underline{P}_0$ est un groupoïde connexe <u>commutatif</u>, donc les groupes $\mathrm{Aut}(X)$, $(X\in \mathrm{Ob}\,\underline{P}_0)$ sont canoniquement isomorphes entre eux, ou encore canoniquement isomorphes au groupe $\Pi_1(\underline{P}) = \mathrm{Aut}(\underline{1})$. Ces isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(\underline{1}) &\longrightarrow \mathrm{Aut}(X)\\ u &\longmapsto fuf^{-1}\end{aligned}$$

où $X\in\mathrm{Ob}\,P_0$ et $f:\underline{1}\to X$ une flèche quelconque, coïncident avec les isomorphismes $\gamma_X,\delta_X$. En effet, en vertu de la relation (9) dans (Chap. I, §2, n°3, Prop. 8) nous avons

$$\gamma_{\underline{1}}(u) = \delta_{\underline{1}}(u) = u$$

pour tout $u\in\mathrm{Aut}(\underline{1})$. Puisque $(\gamma_X u)_{X\in\mathrm{Ob}\,P}$ et $(\delta_X u)_{X\in\mathrm{Ob}\,P}$ sont commutativité des diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{1} & \xrightarrow{\gamma_{\underline{1}}u = u} & \underline{1} & \quad & \underline{1} & \xrightarrow{\delta_{\underline{1}}u = u} & \underline{1} \\ f\downarrow & & \downarrow f & & f\downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{\gamma_X u} & X & & X & \xrightarrow{\delta_X u} & X \end{array}$$

pour toute flèche $f : \underline{1} \to X$, ce qui montre que $\gamma_X$, $\delta_X$ coïncident avec les isomorphismes $u \mapsto f u f^{-1}$.

3. Structure des Gr. catégories.

Définition 3.– Soient $\underline{P}$ une Gr. catégorie, $(a, (\underline{1}, g, d))$ la contrainte AU de $\underline{P}$, $\Pi_0(\underline{P})$ et $\Pi_1(\underline{P})$ les groupes attachés à $\underline{P}$ dans ($n^{\circ}2$, Déf. 2). On construit une catégorie $\underline{S}$ dont les objets sont les éléments de $\Pi_0(\underline{P})$, les morphismes sont des automorphismes. On pose pour chaque $s \in \Pi_0(\underline{P})$

$$\mathrm{Aut}_{\underline{S}}(s) = \{s\} \times \Pi_1(\underline{P})$$

la composition des flèches étant l'addition de $\Pi_1(\underline{P})$. Pour chaque classe $s = cl X \in \Pi_0(\underline{P})$, on choisit un représentant noté $X_s$ ; et pour chaque $X \in s$, on choisit un isomorphisme $i_X : X_s \xrightarrow{\sim} X$, tel que

$$(9) \qquad i_{X_s} = id_{X_s}.$$

Proposition 7.– Le foncteur $G : \underline{P} \to \underline{S}$ défini par

$$(10) \qquad \begin{cases} G(X) = s \\ G(f) = (s, \gamma^{-1}_{X_s}(i^{-1}_Y f i_X)) \end{cases}$$

pour $X, Y \in s$ et $f : X \to Y$, est une équivalence.

Démonstration.– D'abord, on a

$$G(id_X) = (s, \gamma^{-1}_{X_s}(id_{X_s})) = (s, 0)$$

et pour $h : Y \to Z$,

$$G(hf) = (s, \gamma^{-1}_{X_s}(i^{-1}_Z hf i_X)) = (s, \gamma^{-1}_{X_s}(i^{-1}_Z h i_Y i^{-1}_Y f i_X)) =$$

$$= (s, \gamma^{-1}_{X_s}(i^{-1}_Z h i_Y) + \gamma^{-1}_{X_s}(i^{-1}_Y f i_X)) = (s, \gamma^{-1}_{X_s}(i^{-1}_Z h i_Y)) \circ (s, \gamma^{-1}_{X_s}(i^{-1}_Y f i_X))$$

$$= G(h)\, G(f),$$

ce qui montre que $G$ est un foncteur. Construisons un foncteur $H : \underline{S} \to \underline{P}$ de la manière suivante :

$$(\mathrm{H}) \qquad \begin{cases} H(s) = X_s \\ H(s,u) = \gamma_{X_s}(u) \end{cases}$$

$H$ est bien un foncteur. Par la définition de $G, H$ ; pour $X, Y \in s$ et $f : X \to Y$, on a

$$HG(X) = HG(Y) = X_s$$

$$HG(f) = i^{-1}_Y f i_X$$

$$GH(s) = s$$

$$GH(s,u) = (s,u)$$

ce qui donne les isomorphismes fonctoriels

$$HG(X) \xrightarrow[\sim]{i_X} X$$

$$GH(s) \overset{id_s}{=\!=} s \; .$$

qui, compte tenu de (9), vérifient bien (Chap. I, §5, n°1, Rel. (1)). Par conséquent $G$ est bien une équivalence.

<u>Définition 4</u>.- Définissons une loi $\otimes$ dans la catégorie $\underline{S}$ par transport au moyen du quadruple $(G, H, i, id)$ défini dans la proposition 7 où $G : \underline{P} \to \underline{S}$, $H : \underline{S} \to \underline{P}$, $HG \xrightarrow[\sim]{i} id_{\underline{P}}$, $GH \overset{id}{=\!=} id_{\underline{S}}$. En vertu de (Chap. I, §5, n°2, Déf. 3), nous avons

$$(12) \qquad s \otimes t = G(Hs \otimes Ht) = G(X_s \otimes X_t) = st$$

Pour $(s,u) : s \longrightarrow s$, $(t,v) : t \longrightarrow t$,

$$(s,u)\otimes(t,v) = G(H(s,u)\otimes H(t,v)) = G(\gamma_{X_s}(u)\otimes\gamma_{X_t}(v)) =$$

$$= (st, \gamma^{-1}_{X_{st}}(i^{-1}_{X_s\otimes X_t}(\gamma_{X_s}(u)\otimes\gamma_{X_t}(v))\, i_{X_s\otimes X_t}))$$

Or nous avons, d'après (Chap. I, §3, n°2, For. (28) et (30)) et (n°2, For. (7)),

$$\gamma_{X_s}(u)\otimes id_{X_t} = \gamma_{X_s\otimes X_t}(u)$$

$$id_{X_s}\otimes\gamma_{X_t}(v) = \delta_{X_s}(v)\otimes id_{X_t} = \gamma_{X_s}\gamma^{-1}_{X_s}\delta_{X_s}(v)\otimes id_{X_t} =$$

$$= \gamma_{X_s\otimes X_t}(\gamma^{-1}_{X_s}\delta_{X_s}(v)) = \gamma_{X_s\otimes X_t}(sv)$$

Par conséquent

$$\gamma_{X_s}(u)\otimes\gamma_{X_t}(v) = (\gamma_{X_s}(u)\otimes id_{X_t})(id_{X_s}\otimes\gamma_{X_t}(v)) =$$

$$= \gamma_{X_s\otimes X_t}(u)\,\gamma_{X_s\otimes X_t}(sv) = \gamma_{X_s\otimes X_t}(u+sv)$$

Ce qui donne, compte tenu de la fonctorialité de $\gamma(u)$

$$i^{-1}_{X_s\otimes X_t}(\gamma_{X_s\otimes X_t}(u+sv))\, i_{X_s\otimes X_t} = \gamma_{X_{st}}(u+sv)$$

D'où la formule

$$(13) \qquad (s,u)\otimes(t,v) = (st, u+sv).$$

On voit aussitôt que la loi $\otimes$ définie dans $\underline{S}$ par les formules (12) et (13) est indépendante du choix de $X_s$ et $i_X$, et analogue à celle définie dans la catégorie $\underline{C}$ construite au moyen d'un groupe $M$ et d'un $M$-module abélien $N$ à gauche (Chap. I, §1, n°2, Ex. 5)). La $\otimes$-catégorie $\underline{S}$ est appelée la <u>$\otimes$-catégorie réduite</u> de la Gr-catégorie $\underline{P}$.

En vertu de (Chap. I, §5, n°2, Prop. 10, For. (8)) posons :

$$(14) \qquad \breve{G}_{X,Y} = G(i_X \otimes i_Y) \ , \quad \breve{H}_{s,t} = i^{-1}_{X_s \otimes X_t}$$

ce qui fait que $((G,\breve{G}), (H,\breve{H}), i, id)$ est un quadruple de $\otimes$-équivalence entre $\underline{P}$ et $\underline{S}$ (Chap. I, §5, n°2, Prop. 3).

Nous avons vu que le choix de $X_s$ pour chaque $s \in \Pi_0(\underline{P})$ et de $i_X : X_s \xrightarrow{\sim} X$ pour chaque $X \in s$ détermine les $\otimes$-équivalences

$$(G,\breve{G}) : \underline{P} \longrightarrow \underline{S} \quad , (H,\breve{H}) : \underline{S} \longrightarrow \underline{P} \ , \quad (\text{For. } (10), (11), (14))$$

ce qui conduit à la définition suivante :

<u>Définition 5</u>.- Soit $\underline{P}$ une Gr.-catégorie. On dit qu'on a donné un <u>épinglage</u> dans $\underline{P}$, si pour chaque classe $s \in \Pi_0(\underline{P})$, on a choisi un représentant noté $X_s$, et pour chaque $X \in s$, on a choisi un isomorphisme $i_X : X_s \xrightarrow{\sim} X$, tels que

$$(15) \quad X_s = \underline{1} \text{ pour } s = 1 = cl(\underline{1}),\ i_{X_s} = id_{X_s},\ i_{\underline{1}\otimes X_s} = g_{X_s},\ i_{X_s \otimes \underline{1}} = d_{X_s}$$

Les $\otimes$-équivalences $(G,\breve{G}) : \underline{P} \longrightarrow \underline{S}$, $(H,\breve{H}) : \underline{S} \longrightarrow \underline{P}$ déterminées par un épinglage sont appelées des <u>$\otimes$-équivalences canoniques</u>.

Pour formuler les propositions qui suivent, nous introduisons les groupes $H^n(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P}))$ au sens de la cohomologie des groupes [12], i.e les groupes de cohomologie du complexe de cochaînes

$$(16) \qquad \xrightarrow{\ \partial\ } C^n(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P})) \xrightarrow{\ \partial\ } C^{n+1}(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P})) \longrightarrow$$

où le groupe $C^n(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P}))$ de $n$-cochaînes est le groupe des fonctions $f$ de $n$ variables $s_i$ dans $\Pi_0(\underline{P})$, et à valeurs dans $\Pi_1(\underline{P})$, satisfaisant les conditions de normalisation

$$(17) \qquad f(s_1, \dots, s_{i-1}, 1, s_{i+1}, \dots, s_n) = 0\ , \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

La somme de deux cochaînes $f_1$ et $f_2$ est donnée par l'addition des valeurs:

$$(f_1+f_2)(s_1,\dots,s_n) = f_1(s_1,\dots,s_n)+f_2(s_1,\dots,s_n)$$

L'homomorphisme de cobord $\partial : C^n(\Pi_0(\underline{P}),\Pi_1(\underline{P})) \longrightarrow C^{n+1}(\Pi_0(\underline{P}),\Pi_1(\underline{P}))$ est défini par

$$(18)\quad \begin{cases} \partial f(s_1,\dots,s_{n+1}) = (-1)^{n+1}\big[s_1 f(s_2,\dots,s_{n+1}) + \dots \\ + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(s_1,\dots,s_i s_{i+1},\dots,s_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(s_1,\dots,s_n)\big] \end{cases}$$

Nous notons $Z^n(\Pi_0(\underline{P}),\Pi_1(\underline{P}))$ le groupe des $n$-cocycles et $B^n(\Pi_0(\underline{P}),\Pi_1(\underline{P}))$ le groupe des $n$-cobords. Enfin la valeur prise par une $n$-cochaîne $f$ en $(s_1,\dots,s_n)$ est notée soit $f(s_1,\dots,s_n)$, soit $f_{s_1,\dots,s_n}$.

Revenons à la $\otimes$-catégorie réduite $\underline{S}$ de la Gr-catégorie $\underline{P}$. Pour des raisons de commodité, nous notons des fois les flèches $(s,u): s \longrightarrow s$ de $\underline{S}$ par $u$ simplement si aucune confusion n'est à craindre.

<u>Proposition 8</u>.– Soient $\underline{P}$ une Gr-catégorie, $a$ sa contrainte d'associativité, $\underline{S}$ sa $\otimes$-catégorie réduite, $(X_s, i_X)$ un épinglage dans $\underline{P}$, $(H,\check{H}) : \underline{S} \longrightarrow \underline{P}$ la $\otimes$-équivalence canonique correspondante. Alors la contrainte d'associativité $\xi$ pour $\underline{S}$ défini par le diagramme commutatif suivant

$$(19)\quad \begin{array}{ccccc} X_r\otimes(X_s\otimes X_t) & \xleftarrow{id\otimes i_{X_s\otimes X_t}} & X_r\otimes X_{st} & \xleftarrow{i_{X_r\otimes X_{st}}} & X_{rst} \\ \downarrow{\scriptstyle a_{X_r,X_s,X_t}} & & & & \downarrow{\scriptstyle H(\xi_{r,s,t}) = \gamma_{X_{rst}}(\xi_{r,s,t})} \\ (X_r\otimes X_s)\otimes X_t & \xleftarrow{i_{X_r\otimes X_s}\otimes id} & X_{rs}\otimes X_t & \xleftarrow{i_{X_{rs}\otimes X_t}} & X_{rst} \end{array}$$

est un 3-cocycle normalisé de $\Pi_0(\underline{P})$ à valeurs dans le $\Pi_0(\underline{P})$-module $\Pi_1(\underline{P})$, i.e $\xi \in Z^3(\Pi_0(\underline{P}),\Pi_1(\underline{P}))$.

<u>Démonstration</u>.– Remarquons tout d'abord que $\xi$ déterminé par (19) n'est autre que la contrainte d'associativité $H^*(a)$ induite par $(H,\check{H})$ (Chap. I, §5, n° 1, Déf. 2) en tenant compte de la formule (14) donnant les valeurs de $\check{H}$. $\xi$ étant une contrainte d'associativité pour $\underline{S}$, on peut

donc le considérer comme un 3-cocycle de $\Pi_0(\underline{P})$ à valeurs dans le $\Pi_0(\underline{P})$-module $\Pi_1(\underline{P})$ (Chap. I, §2, n°1, Ex.). Montrons que $\xi$ est normalisé.

D'abord pour $r = 1$, nous considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\underline{1}\otimes(X_s\otimes X_t) \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & & \underline{1}\otimes X_{st} \arrow[ll, "id\otimes i_{X_s\otimes X_t}"'] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{II})"] & & X_{st} \arrow[ll, "g_{X_{st}}"'] \arrow[d, "\gamma_{X_{st}}(\xi_{1,s,t})"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{III})"] \\
(\underline{1}\otimes X_s)\otimes X_t & & X_s\otimes X_t \arrow[ll, "g_{X_s}\otimes id"] \arrow[ull, "g_{X_s\otimes X_t}"'] & & X_{st} \arrow[ll, "i_{X_s\otimes X_t}"] \arrow[ull, "g_{X_{st}}"']
\end{tikzcd}$$

dont le circuit extérieur n'est pas autre que le diagramme commutatif (19) avec $r = 1$, et dont la région (I) est commutative en vertu de la compatibilité entre $a$ et $(\underline{1}, g, d)$ (Chap. I, §3, n°2, Déf. 5), la région (II) en vertu de la fonctorialité de $g$. On en déduit la commutativité de (III), ce qui donne $\xi_{1,s,t} = 0$.

Pour $s = 1$ et $t = 1$, nous avons respectivement les diagrammes commutatifs suivants.

$$\begin{tikzcd}
X_r\otimes(\underline{1}\otimes X_t) \arrow[d, "a"'] & & X_r\otimes X_t \arrow[ll, "id\otimes g_{X_t}"'] \arrow[d, equal] & & X_{rt} \arrow[ll, "i_{X_r\otimes X_t}"'] \arrow[d, "\gamma_{rt}(\xi_{r,1,t})"] \\
(X_r\otimes\underline{1})\otimes X_t & & X_r\otimes X_t \arrow[ll, "d_{X_r}\otimes id"'] & & X_{rt} \arrow[ll, "i_{X_r\otimes X_t}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X_r\otimes(X_s\otimes\underline{1}) \arrow[d, "a"'] & & X_r\otimes X_s \arrow[ll, "id\otimes d_{X_s}"'] \arrow[dll, "d_{X_r\otimes X_s}"'] & & X_{rs} \arrow[ll, "i_{X_r\otimes X_s}"'] \arrow[d, "\gamma_{rs}(\xi_{r,s,1})"] \arrow[dll, "d_{X_{rs}}"'] \\
(X_r\otimes X_s)\otimes\underline{1} & & X_{rs}\otimes\underline{1} \arrow[ll, "i_{X_r\otimes X_s}\otimes id"] & & X_{rs} \arrow[ll, "d_{X_{rs}}"]
\end{tikzcd}$$

qui nous donnent $\xi_{r,1,t} = \xi_{r,s,1} = 0$.

<u>Proposition 9</u>. — Les hypothèses étant celles de la proposition 8, on considère en plus la $\otimes$-équivalence canonique $(G, \breve{G}) : \underline{P} \to \underline{S}$. Alors la $\otimes$-catégorie $\underline{S}$ munie de la contrainte d'associativité $\xi$ définie dans la proposition 8 et de la contrainte d'unité $(1, id, id)$ est une Gr-catégorie ; et les $\otimes$-foncteurs $(G, \breve{G})$, $(H, \breve{H})$ sont des $\otimes$-foncteurs compatibles avec les contraintes d'associativité $a$, $\xi$ et les contraintes d'unité $(\underline{1}, g, d)$,

$(1, id, id)$.

Démonstration.- Comme on a remarqué dans la démonstration de la proposition 8, $\xi$ n'est ~~pas~~ autre que la contrainte d'associativité $H^*(a)$ induite par $(H, \check{H})$. Donc $(H, \check{H})$ est compatible avec $a, \xi$ ; et par conséquent il en est de même de $(G, \check{G})$ (Chap. I, §5, n° 1, Prop. 4). Quant à la contrainte d'unité $(1, id, id)$, elle est celle définie par le quadruple de $\otimes$- équivalence $((G, \check{G}), (H, \check{H}), i, id)$ (Chap. I, §5, n° 1, Prop. 9), compte tenu des formules (10), (11), (14), (15). Donc $(G, \check{G})$ est compatible avec $(\underline{1}, g, d)$, $(1, id, id)$ (Chap. I, §5, n° 1, Prop. 9) et il en est de même de $(H, \check{H})$ (Chap. I, §5, n° 1, Prop. 6). $(\xi, (1, id, id))$ est bien une contrainte AU pour la $\otimes$- catégorie $\underline{S}$ en remarquant que $\xi$ est normalisé et en se rappellant la condition de compatibilité donnée dans (Chap. I, §3, n° 2, Ex., For. (26)) au cas où $\xi$ est normalisé. Enfin la $\otimes$- catégorie AU $\underline{S}$ est une Gr- catégorie, soit en remarquant que $\Pi_0(\underline{P})$ et le produit semi-direct $\Pi_0(\underline{P}) . \Pi_1(\underline{P})$ sont des groupes, soit en appliquant la proposition 2 du n° 1.

- D'après la proposition 8, la contrainte d'associativité $\xi$ définie par le diagramme commutatif (19) pour la $\otimes$- catégorie $\underline{S}$ est un 3- cocycle. Regardons maintenant ce que devient $\xi$ pour un changement d'épinglage.

Proposition 10.- Par un changement d'épinglage de $\underline{P}$, le 3- cocycle $\xi$ est changé en un 3- cocycle $\xi'$, différent de $\xi$ par un cobord $\partial\beta$, $\beta \in C^2(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P}))$.

Démonstration.- Soient $(X_s, i_X)$, $(X'_s, i'_X)$ deux épinglages de $\underline{P}$ et soient $(G, \check{G})$, $(H, \check{H})$, $\xi$, $(G', \check{G}')$, $(H', \check{H}')$, $\xi'$ les $\otimes$- équivalences canoniques et les contraintes d'associativité correspondantes. D'après la proposition 9, $(G, \check{G})$ et $(H, \check{H})$ sont compatibles avec les contraintes d'associativité $a$ et $\xi$ ; $(G', \check{G}')$ et $(H', \check{H}')$ sont compatibles avec les contraintes d'associativité a et $\xi'$. En vertu des formules (10), (11) et de la fonctorialité de $\gamma_X(u)$ en X, nous avons

$$(G', \check{G}') \circ (H, \check{H}) = (id_{\underline{S}}, \breve{G'H}) : \underline{S} \longrightarrow \underline{S}$$

D'autre part, en vertu de (Chap. I, §4, n° 2, Prop. 1) le $\otimes$-foncteur composé

$$(id_{\underline{S}}, \breve{G'H}) : (\underline{S}, \xi) \longrightarrow (\underline{S}, \xi')$$

est compatible avec les contraintes d'associativité $\xi$, $\xi'$; d'où $\xi' = \xi + \partial\beta$, avec $\beta = \breve{G'H}$. On vérifie aussitôt que $\beta$ est une 2-cochaîne normalisée à l'aide des formules (14), (15) et de la fonctorialité de g et d.

Pour un épinglage donné $(X_s, i_X)$ de $\underline{P}$, nous avons construit les foncteurs G et H au moyen des isomorphismes $\gamma_X$, on peut aussi bien le faire avec les isomorphismes $\delta_X$. On obtient des résultats analogues à savoir :

<u>Proposition 11</u>.— Les foncteurs $D : \underline{P} \longrightarrow \underline{S}$ et $K : \underline{S} \longrightarrow \underline{P}$ définis par

$$(20) \qquad \begin{cases} D(X) = s \\ D(f) = (s, \delta^{-1}_{X_s}(i^{-1}_Y f\, i_X)) \end{cases}$$

pour $X, Y \in s$, $f : X \to Y$, et

$$(21) \qquad \begin{cases} K(s) = X_s \\ K((s,u)) = \delta_{X_s}(u) \end{cases}$$

vérifient

$$KD(X) \xrightarrow[\sim]{i_X} X$$

$$DK(s) \overset{id_s}{=} s .$$

Définition 6.– Munissons $\underline{S}$ de la loi $\otimes$ obtenue par transport de la loi $\otimes$ dans $\underline{P}$ au moyen de $(D, K, \varepsilon, id)$. En vertu de la formule (7) dans (Chap. I, §5, n°2, Déf. 3) nous avons

$$s \otimes t = D(Ks \otimes Kt) = D(X_s \otimes X_t) = st$$

$$(s,u) \otimes (t,v) = D(K(s,u) \otimes K(t,v)) = D(\delta_{X_s}(u) \otimes \delta_{X_t}(v)) =$$

$$= (st,\ \delta^{-1}_{X_{st}} \{ i^{-1}_{X_s \otimes X_t} (\delta_{X_s}(u) \otimes \delta_{X_t}(v))\, i_{X_s \otimes X_t} \})$$

Or, d'après (Chap. I, §3, n°2, For. (29) et (30)) et (n°1, For. (8))

$$\delta_{X_s}(u) \otimes id_{X_t} = id_{X_s} \otimes \gamma_{X_t}(u) = id_{X_s} \otimes \delta_{X_t} \delta^{-1}_{X_t} \gamma_{X_t}(u) =$$

$$= \delta_{X_s \otimes X_t} (\delta^{-1}_{X_t} \gamma_{X_t}(u)) = \delta_{X_s \otimes X_t}(ut)$$

et

$$id_{X_s} \otimes \delta_{X_t}(v) = \delta_{X_s \otimes X_t}(v).$$

Par conséquent

$$\delta_{X_s}(u) \otimes \delta_{X_t}(v) = (\delta_{X_s}(u) \otimes id)(id \otimes \delta_{X_t}(v)) = \delta_{X_s \otimes X_t}(ut)\, \delta_{X_s \otimes X_t}(v) =$$

$$= \delta_{X_s \otimes X_t}(ut + v)$$

Ce qui donne, compte tenu de la fonctorialité de $\delta_X(u)$

$$i^{-1}_{X_s \otimes X_t} (\delta_{X_s \otimes X_t}(ut+v))\, i_{X_s \otimes X_t} = \delta_{X_{st}}(ut+v).$$

Donc

$$(22) \qquad (s,u) \otimes (t,v) = (st,\ ut + v).$$

On peut dire ici que le produit tensoriel des flèches dans $\underline{S}$ est le produit du produit semi-direct $\Pi_0(\underline{P}).\Pi_1(\underline{P})$ où $\Pi_1(\underline{P})$ est un $\Pi_0(\underline{P})$-module à droite. On peut munir la gr-catégorie $\underline{S}$ ainsi définie de la contrainte $H^*(a)$ induite par $(H, \check{H})$, mais $H^*a$ n'est pas un 3-cocycle au sens de la cohomologie des groupes habituelle comme on peut vérifier aussitôt avec la formule (22). C'est pour cette raison que désormais les foncteurs G et H sont construits au moyen des isomorphismes $\gamma_X$ et quand on parle du $\Pi_0(\underline{P})$-module $\Pi_1(\underline{P})$, c'est du $\Pi_0(\underline{P})$-module à gauche dont l'action est définie par la formule (7).

<u>Proposition 12</u>.- Soient $\underline{P}$, $\underline{P}'$ deux Gr-catégories, $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ les contraintes d'unité pour $\underline{P}$, $\underline{P}'$ respectivement. Soit $(F, \breve{F})$ un $\otimes$-foncteur associatif de $\underline{P}$ dans $\underline{P}'$. Alors le $\otimes$-foncteur $(F, \breve{F})$ détermine des homomorphismes, appelés <u>homomorphismes induits</u> par $(F, \breve{F})$

$$\tilde{F} \;:\; cl\,X \longmapsto cl\,FX$$

$$\overset{\circ}{F} \;:\; u \longmapsto \gamma^{-1}_{F\underline{1}}(Fu)$$

de $\Pi_0(\underline{P})$ dans $\Pi_0(\underline{P}')$ et de $\Pi_1(\underline{P})$ dans $\Pi_1(\underline{P}')$ respectivement, ces homomorphismes respectent les actions de $\Pi_0(\underline{P})$ sur $\Pi_1(\underline{P})$ et de $\Pi_0(\underline{P}')$ sur $\Pi_1(\underline{P}')$, c'est à dire

$$(22) \qquad \overset{\circ}{F}(su) = \tilde{F}(s)\,\overset{\circ}{F}(u)$$

En plus, F est une équivalence si et seulement si $\tilde{F}$ et $\overset{\circ}{F}$ sont des isomorphismes.

<u>Démonstration</u>.- D'abord on a

$$\tilde{F}(cl\,X \otimes cl\,Y) = \tilde{F}(cl\,(X\otimes Y)) = cl\,F(X\otimes Y) = cl(FX\otimes FY) = cl\,FX \otimes cl\,FY$$
$$= \tilde{F}(cl\,X) \otimes \tilde{F}(cl\,Y)$$

ce qui montre que $\tilde{F}$ est un homomorphisme. On vérifie aussitôt que $\overset{\circ}{F}$ est un homomorphisme en vertu du fait que F est un foncteur et $\gamma_{F\underline{1}}$ un isomorphisme.

Pour démontrer (22), remarquons qu'on a une flèche $\hat{F} : \underline{1} \to F\underline{1}$ venant du fait que $(F, \breve{F})$ est aussi compatible avec les unités (n°1, Prop. 4), ensuite considérons les diagrammes suivants

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\underline{1}'\otimes FX \arrow[r, "\gamma^{-1}_{FX}(F\delta_X u)\otimes id"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \underline{1}'\otimes FX \arrow[d, equal] \\
\underline{1}'\otimes FX \arrow[r, "\gamma^{-1}_{F\underline{1}}(F\gamma^{-1}_X\delta_X u)\otimes id"] \arrow[d, "\hat{F}\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1}'\otimes FX \arrow[d, "\hat{F}\otimes id"'] \\
F\underline{1}\otimes FX \arrow[r, "F\gamma^{-1}_X\delta_X u\otimes id"] \arrow[d, "\check{F}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & F\underline{1}\otimes FX \arrow[d, "\check{F}"'] \\
F(\underline{1}\otimes X) \arrow[r, "F(\gamma^{-1}_X\delta_X u\otimes id)"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F(\underline{1}\otimes X) \\
FX \arrow[r, "F(\delta_X u)"] \arrow[u, "Fg_X"] \arrow[uuuu, bend left=70, "g'_{FX}", "(\mathrm{V})"'] & FX \arrow[u, "Fg_X"'] \arrow[uuuu, bend right=70, "g'_{FX}"', "(\mathrm{VI})"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
FX \arrow[r, "\delta_{FX}(\gamma^{-1}_{F\underline{1}}Fu)"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & FX \arrow[d, equal] \\
FX \arrow[r, "F(\delta_X u)"] \arrow[d, "Fd_X"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & FX \arrow[d, "Fd_X"'] \\
F(X\otimes\underline{1}) \arrow[r, "F(id\otimes u)"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IX})"] & F(X\otimes\underline{1}) \\
FX\otimes F\underline{1} \arrow[r, "id\otimes Fu"] \arrow[u, "\check{F}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{X})"] & FX\otimes F\underline{1} \arrow[u, "\check{F}"'] \\
FX\otimes\underline{1}' \arrow[r, "id\otimes\gamma^{-1}_{F\underline{1}}(Fu)"] \arrow[u, "id\otimes\hat{F}"] \arrow[uuuu, bend left=70, "d'_{FX}", "(\mathrm{XI})"'] & FX\otimes\underline{1}' \arrow[u, "id\otimes\hat{F}"'] \arrow[uuuu, bend right=70, "d'_{FX}"', "(\mathrm{XII})"]
\end{tikzcd}
$$

dont la commutativité des régions (II) et (X) résulte de la relation $\gamma_{\underline{1}}(u) = u$ et de la fonctorialité de $\gamma$ ; celle de (III) et (IX) de la fonctorialité de $\check{F}$ ; celle de (IV), (VIII) et des deux circuits extérieurs de la définition de $\gamma$ et $\delta$ (Chap. I, § 2, n° 3, Prop. 8, Diag.(8)) ; celle de (V), (VI), (XI), (XII) de la compatibilité de $(F, \check{F})$ avec les unités $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$. On en déduit la commutativité de (I) et (VII), qui donne, compte tenu du fait que FX est régulier

$$\gamma^{-1}_{F\underline{1}}(F\gamma^{-1}_X\delta_X u) = \gamma^{-1}_{FX}(F\delta_X u)$$

$$F(\delta_X u) = \delta_{FX}(\gamma^{-1}_{F\underline{1}} Fu)$$

Par conséquent

$$\gamma^{-1}_{F\underline{1}}(F\gamma^{-1}_X\delta_X u) = \gamma^{-1}_{FX}\delta_{FX}(\gamma^{-1}_{F\underline{1}} Fu)$$

ou, en posant

$$s = \mathrm{cl}\,X\ ,\ s' = \mathrm{cl}\,FX = \tilde{F}(s)$$

et en tenant compte de la relation $\gamma^{-1}_X\delta_X(u) = su$, on obtient (22).
On vérifie aussitôt que $\tilde{F}$ et $\overset{\circ}{F}$ sont des isomorphismes si et seulement si le foncteur $F$ est une équivalence.

Nous allons maintenant considérer les Gr-catégories ayant le même type, plus précisément :

<u>Définition 6</u>.– Soit $M$ un groupe, $N$ un $M$-module abélien à gauche. Un <u>prépinglage de type $(M,N)$</u> pour une Gr-catégorie $\underline{P}$ est un couple $\varepsilon = (\varepsilon_o, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_o : M \xrightarrow{\sim} \Pi_o(\underline{P})\ ,\ \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \Pi_1(\underline{P})$$

compatibles avec les actions de $M$ sur $N$ et de $\Pi_o(\underline{P})$ sur $\Pi_1(\underline{P})$, i.e $\varepsilon_1(su) = \varepsilon_o(s)\,\varepsilon_1(u)$. Une Gr-catégorie préépinglée de type $(M,N)$ est une Gr-catégorie $\underline{P}$ munie d'un prépinglage. Un <u>morphisme</u> de Gr-catégories préépinglées de type $(M,N)$ $(\underline{P},\varepsilon) \longrightarrow (\underline{P}',\varepsilon')$ est un $\otimes$-foncteur associatif $(F,\breve{F}) : \underline{P} \to \underline{P}'$ tel que les triangles

(23)
$$\begin{tikzcd} \Pi_o(\underline{P}) \arrow[rr, "\tilde{F}"] & & \Pi_o(\underline{P}') \\ & M \arrow[ul, "\varepsilon_o"] \arrow[ur, "\varepsilon'_o"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Pi_1(\underline{P}) \arrow[rr, "\overset{\circ}{F}"] & & \Pi_1(\underline{P}') \\ & N \arrow[ul, "\varepsilon_1"] \arrow[ur, "\varepsilon'_1"'] & \end{tikzcd}$$

soient commutatifs, $\tilde{F}$ et $\overset{\circ}{F}$ étant les homomorphismes induits par $F$.
On en déduit que tout tel morphisme est une $\otimes$-équivalence (Prop. 12),

donc l'ensemble des classes d'équivalence de Gr-catégories préépinglées de type $(M,N)$ est égal à l'ensemble des composantes connexes de la catégorie des Gr-catégories préépinglées de type $(M,N)$.

<u>Proposition 13</u>.- Il y a une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équivalence de Gr-catégories préépinglées de type $(M,N)$ et l'ensemble $H^3(M,N)$ des 3-cocycles normalisés de $M$ à valeurs dans $N$ modulo cobord.

<u>Démonstration</u>.- Soient $(\underline{P}, \varepsilon)$ une Gr-catégorie préépinglée de type $(M,N)$ et $(X_s, i_X)$ un épinglage de $\underline{P}$. Soient $\underline{S}$ la $\otimes$-catégorie réduite de $\underline{P}$, $(G,\check{G}) : \underline{P} \to \underline{S}$, $(H,\check{H}) : \underline{S} \to \underline{P}$ les $\otimes$-équivalences canoniques déterminées par l'épinglage $(X_s, i_X)$. Soit $\xi$ la contrainte d'associativité induite par $(H,\check{H})$ pour la $\otimes$-catégorie $\underline{S}$. Enfin soit $\underline{T}$ la $\otimes$-catégorie construite à partir du groupe $M$ et du $M$-module $N$ (Chap. I, §1, n°2, Ex 5)). Le couple d'isomorphismes $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ donne les applications

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\,\underline{T} &\longrightarrow \mathrm{Ob}\,\underline{S} \\ s &\longmapsto \varepsilon_0 s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Fl}\,\underline{T} &\longrightarrow \mathrm{Fl}\,\underline{S} \\ (s,u) &\longmapsto (\varepsilon_0 s, \varepsilon_1 u) \end{aligned}$$

qui détermine un foncteur noté aussi $\varepsilon$ de la catégorie $\underline{T}$ dans la catégorie $\underline{S}$. Ce foncteur est un isomorphisme puisque les applications $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ sont des bijections. En outre le couple $(\varepsilon, \check{\varepsilon} = id)$ constitue un $\otimes$-foncteur de la $\otimes$-catégorie $\underline{T}$ dans la $\otimes$-catégorie $\underline{S}$ en vertu du fait que les isomorphismes $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ sont compatibles avec les actions de $M$ sur $N$ et de $\pi_0(\underline{P})$ sur $\pi_1(\underline{P})$. Le $\otimes$-foncteur $(\varepsilon, id)$ induit les contraintes $\cancel{\alpha = \varepsilon_1^{-1}(\xi)}$ d'associativité $\alpha = \varepsilon_1^{-1}(\xi)$ et d'unité $(1, id, id)$ sur $\underline{T}$, qui sont compatibles (Chap. I, §3, n°2, Ex.). $\underline{T}$ devient une Gr-catégorie et $(\varepsilon, id)$ un $\otimes$-foncteur associatif dont l'inverse est le $\otimes$-foncteur associatif $(\varepsilon^{-1}, id)$ où $\varepsilon^{-1}$ est déterminé par les isomorphismes $\varepsilon_0^{-1}, \varepsilon_1^{-1}$.

Donc à chaque Gr-catégorie préépinglée $(\underline{P}, \varepsilon)$ de type $(M,N)$ nous avons fait correspondre un 3-cocycle $\alpha \in Z^3(M,N)$. Un changement d'épinglage de $\underline{P}$ fait varier $\alpha$ d'un cobord, i.e $\alpha$ est changé en $\alpha + \partial\beta$, $\beta \in C^2(M,N)$.

Soit $(\underline{P}', \varepsilon')$ une autre Gr-catégorie préépinglée de type $(M,N)$ et soit $\alpha'$ le 3-cocycle correspondant. Démontrons que $\alpha$ et $\alpha'$ sont cohomologues si et seulement s'il existe un morphisme de Gr-catégories préépinglées de type $(M,N)$, $(F,\breve{F}) : (\underline{P},\varepsilon) \to (\underline{P}',\varepsilon')$. Supposons qu'il existe $(F,\breve{F}) : (\underline{P},\varepsilon) \to (\underline{P}',\varepsilon')$. Soit $\underline{S}'$ la $\otimes$-catégorie réduite de $\underline{P}'$. Considérons un épinglage de $\underline{P}'$ qui détermine les $\otimes$-équivalences canoniques $(G',\breve{G}') : \underline{P}' \to \underline{S}'$, $(H',\breve{H}') : \underline{S}' \to \underline{P}'$ et les contraintes d'associativité $\xi'$, $\alpha' = \varepsilon_1'^{-1}(\xi')$ pour $\underline{S}'$ et $\underline{I}'$ respectivement. Alors le couple d'isomorphismes $(\tilde{F}, \ddot{F})$ induits par $(F,\breve{F})$ (Prop. 12) détermine un foncteur $\mathfrak{F} : \underline{S} \to \underline{S}'$ qui est manifestement un isomorphisme. Considérons le $\otimes$-foncteur composé

$$(G',\breve{G}')\circ(F,\breve{F})\circ(H,\breve{H}) = (G'FH, \breve{G'FH}) : \underline{S} \to \underline{S}'$$

En vertu de la proposition 1 dans (Chap. I, §4, n°2), $(G'FH, \breve{G'FH})$ est un $\otimes$-foncteur compatible avec les contraintes d'associativité $\xi$, $\xi'$ de $\underline{S}$ et $\underline{S}'$ respectivement. En outre, on vérifie aussitôt que le foncteur $G'FH$ n'est ~~pas~~ autre que le foncteur $\mathfrak{F}$. Posons $\breve{\mathfrak{F}} = \breve{G'FH}$. D'autre part

$$(\mathcal{G},\breve{\mathcal{G}}) = (\varepsilon'^{-1}, id)\circ(\mathfrak{F},\breve{\mathfrak{F}})\circ(\varepsilon, id) : (\underline{I},\alpha) \to (\underline{I},\alpha')$$

est aussi un $\otimes$-foncteur compatible avec les contraintes d'associativité $\alpha, \alpha'$. Or d'après la définition 6, $\mathcal{G} = id_{\underline{I}}$, donc on peut écrire

$$\alpha' = \alpha + \partial\breve{\mathcal{G}}$$

$\breve{\mathcal{G}}$ étant considérée comme une 2-cochaine de $M$ à valeurs dans $N$. Pour avoir $\breve{\mathcal{G}}$ normalisé, il suffit de prendre un épinglage $(X'_{s'}, i'_{X'})$ de $\underline{P}'$ tel que $i'_{F\underline{1}} = \hat{F} : \underline{1}' \to F\underline{1}$, $\hat{F}$ étant défini par le diagramme commutatif (5) dans (Chap. I, §4, n°2, Prop. 8). Inversement supposons

$\alpha$ et $\alpha'$ cohomologues. Ceci veut dire (Chap. I, §4, n° 2, Rem. 1)) qu'il existe un $\otimes$-foncteur

$$(G, \breve{G}) : (\underline{I}, \alpha) \longrightarrow (\underline{I}, \alpha') \quad \text{avec } G = id_{\underline{I}}$$

compatible avec les contraintes d'associativité $\alpha$, $\alpha'$. Posons

$$(24) \qquad (\mathcal{F}, \breve{\mathcal{F}}) : (\varepsilon', id) \circ (G, \breve{G}) \circ (\varepsilon^{-1}, id) : \underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$$

$(\mathcal{F}, \breve{\mathcal{F}})$ est bien un $\otimes$-foncteur associatif et de plus $\mathcal{F}$ est un isomorphisme. Nous obtenons une $\otimes$-équivalence $(F, \breve{F}) : \underline{P} \longrightarrow \underline{P}'$ compatible avec les contraintes d'associativité de $\underline{P}$ et $\underline{P}'$ en posant

$$(F, \breve{F}) = (H', \breve{H}') \circ (\mathcal{F}, \breve{\mathcal{F}}) \circ (G, \breve{G})$$

Montrons que $(F, \breve{F})$ est un morphisme de Gr-catégories précipinglées de type $(M, N)$. D'après la définition ci-dessus de $(F, \breve{F})$, on peut écrire

$$(G', \breve{G}') \circ (F, \breve{F}) \circ (H, \breve{H}) = (G', \breve{G}') \circ (H', \breve{H}') \circ (\mathcal{F}, \breve{\mathcal{F}}) \circ (G, \breve{G}) \circ (H, \breve{H})$$

ce qui donne

$$G'FH = G'H'\mathcal{F}GH$$

ou en remarquant que $GH = id_{\underline{S}}$ ; $G'H' = id_{\underline{S}'}$ ,

$$G'FH = \mathcal{F}$$

ce qui permet de conclure que le couple d'isomorphismes $(\tilde{F}, \mathring{F})$

$$\tilde{F} : \Pi_0(\underline{P}) \longrightarrow \Pi_0(\underline{P}') \quad , \quad \mathring{F} : \Pi_1(\underline{P}) \longrightarrow \Pi_1(\underline{P}')$$

induits par $F$ constitue le foncteur $\mathcal{F}$. Enfin on a bien les triangles commutatifs (23) en vertu de la relation (24).

Nous avons donc démontré qu'il y a une injection entre l'ensemble des classes d'équivalence de Gr-catégories précipinglées de type $(M, N)$ et l'ensemble $H^3(M, N)$. Montrons que cette injection est en plus surjective. Soit $\alpha \in Z^3(M, N)$, la $\otimes$-catégorie $\underline{I}$ munie de la contrainte d'associativité $\alpha$, de la contrainte d'unité $(1, id, id)$ et du prépinglage $\varepsilon = (id_M, id_N)$ est en effet une Gr-catégorie prépinglée de type $(M,N)$ dont le 3-cocycle correspondant est bien $\alpha$, ce qui achève la démonstration. L'élément de $H^3(M,N)$ qui correspond à la catégorie $(\underline{P}, \varepsilon)$ est noté $\xi_{(\underline{P},\varepsilon)}$.

Exemple.– Soit $\underline{P}$ la $\otimes$-catégorie définie dans (Chap. I, §1, n°2, Ex. 3)). $\underline{P}$ est une Gr-catégorie et on a $\pi_0(\underline{P}) = \pi_1(X, x_0)$, $\pi_1(\underline{P}) = \pi_2(X, x_0)$. L'action de $\pi_0(\underline{P})$ dans $\pi_1(\underline{P})$ est l'action usuelle de $\pi_1(X)$ dans $\pi_2(X)$, et l'invariant $\xi_{(\underline{P},id)} \in H^3(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P}))$ n'est autre que l'invariant de Postnikov, où id est le couple d'isomorphismes $(id_{\pi_0(\underline{P})}, id_{\pi_1(\underline{P})})$.

## §2. Pic-catégories

### 1. Définition des Pic-catégories

Définition 1.– Une Pic-catégorie est une Gr-catégorie munie d'une contrainte de commutativité compatible avec sa contrainte d'associativité. Une Pic-catégorie est dite stricte si sa contrainte de commutativité est stricte (Chap. I, §2, n°2, Déf. 8).

Exemples.– 1) Soient A un anneau commutatif unitaire, $\underline{P}$ une catégorie dont les objets sont les A-modules projectifs de rang un et dont les flèches entre ces objets sont les isomorphismes de A-modules. La catégorie $\underline{P}$ munie du produit tensoriel de A-modules est une $\otimes$-catégorie. On vérifie aussitôt que $\underline{P}$ est une Pic-catégorie, les contraintes d'associativité, commutativité, unité étant les contraintes usuelles.

2) Reprenons l'exemple 4) dans (Chap. I, §1, n°2). Soient $\underline{C}$ une catégorie additive, $\underline{E}$ une catégorie cofibrée sur $\underline{C}$. Pour tout objet A de $\underline{C}$, la fibre de $\underline{E}$ en A est notée $\underline{E}(A)$. L'homomorphisme somme

$$A \times A \longrightarrow A$$

dans $\underline{C}$ donne naissance à un foncteur

$$\underline{E}(A) \times \underline{E}(A) \longrightarrow \underline{E}(A)$$

qui fait de $\underline{E}(A)$ une $\otimes$-catégorie. Le foncteur $\underline{E}(0) \longrightarrow \underline{E}(A)$, déduit de l'unique morphisme $0 \longrightarrow A$, définit dans $\underline{E}(A)$ un objet $\theta_A$, unique à isomorphisme unique près, comme image d'un élément arbitraire de la catégorie $\underline{E}(0)$ équivalente à une catégorie ponctuelle. Les propriétés d'associativité et de commutativité connues pour l'homomorphisme somme $A \times A \longrightarrow A$, et celles de l'objet nul vis-à-vis de cet homomorphisme, permettent alors de définir des isomorphismes canoniques de foncteurs

$$\begin{cases} X \otimes (Y \otimes Z) \simeq (X \otimes Y) \otimes Z \\ X \otimes Y \simeq Y \otimes X \\ X \otimes \theta_A \simeq \theta_A \otimes X \simeq X \end{cases}$$

pour $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\underline{E}(A)$. On peut vérifier que ces isomorphismes fonctoriels constituent une contrainte ACU pour la $\otimes$-catégorie $\underline{E}(A)$ et que la catégorie $\underline{E}(A)$ est un groupoïde. Enfin le foncteur

$$X \longmapsto X^{-1} : \underline{E}(A) \longrightarrow \underline{E}(A)$$

déduit par cochangement de base de l'homomorphisme

$$-id_A : A \longrightarrow A$$

donne lieu à l'isomorphisme canonique

$$X \otimes X^{-1} \simeq \theta_A$$

qui montre que tous les objets de $\underline{E}(A)$ sont inversibles. Les fibres $\underline{E}(A)$ sont donc des Pic-catégories. Pour une flèche $u : A \longrightarrow B$ de $\underline{C}$, le foncteur $u_* : \underline{E}(A) \longrightarrow \underline{E}(B)$ avec l'isomorphisme canonique de bifoncteurs

$$u_*(X) \otimes u_*(Y) \simeq u_*(X \otimes Y)$$

constitue un $\otimes$-foncteur compatible avec les contraintes d'associativité et di commutativité.

<u>Proposition 1.</u> — Soit $\underline{P}$ une Pic. catégorie, et soient $\pi_0(\underline{P})$, $\pi_1(\underline{P})$ le groupe et le $\pi_0(\underline{P})$-module respectivement attachés à $\underline{P}$, considéré comme une Gr. catégorie (§1, n°2, Déf. 2 et Prop. 5). Alors le groupe $\pi_0(\underline{P})$ est commutatif et agit trivialement sur $\pi_1(\underline{P})$.

<u>Démonstration.</u> — Nous avons, en vertu de la contrainte de commutativité

$$\mathrm{cl}\,X \otimes \mathrm{cl}\,Y = \mathrm{cl}(X \otimes Y) = \mathrm{cl}(Y \otimes X) = \mathrm{cl}\,Y \otimes \mathrm{cl}\,X$$

pour tous les objets $X, Y$ de $\underline{P}$, d'où la commutativité du groupe $\pi_0(\underline{P})$. Enfin l'égalité $\gamma_X = \delta_X$ pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ (Chap. I, §3, n°3, Rel. (33)) montre que $\pi_0(\underline{P})$ agit trivialement sur $\pi_1(\underline{P})$ (§1, n°2, Prop. 5).

En vertu de la commutativité du groupe $\pi_0(\underline{P})$, la loi de composition de $\pi_0(\underline{P})$ est donc notée additivement avec $0 = \mathrm{cl}\,\underline{1}$. Soit $\underline{S}$ la $\otimes$-catégorie réduite de $\underline{P}$ considéré comme une Gr. catégorie (§1, n°3, Déf. 4). La loi $\otimes$ définie dans $\underline{S}$ (§1, n°3, Déf. 4) s'exprime ici par

$$(1)\qquad \begin{cases} s \otimes t = s + t \\ (s, u) \otimes (t, v) = (s+t,\ u+v) \end{cases}$$

<u>Proposition 2.</u> — Soient $\underline{P}$ une Pic. catégorie, $(a, c, (\underline{1}, g, d))$ sa contrainte ACU, $\underline{S}$ la $\otimes$-catégorie réduite de $\underline{P}$, $(X_s, i_X)$ un épinglage de $\underline{P}$, $(G, \breve{G}) : \underline{P} \to \underline{S}$, $(H, \breve{H}) : \underline{S} \to \underline{P}$ les $\otimes$-équivalences canoniques correspondantes, $\xi = H^* a$, $\eta = H^* c$ les contraintes d'associativité, de commutativité respectivement pour $\underline{S}$, induites par $(H, \breve{H})$ (Chap. I, §5, n°1, Déf. 2).

(i) $\xi$ est un 3-cocycle normalisé de $\pi_0(\underline{P})$ à valeurs dans $\pi_1(\underline{P})$ et $\eta$ un élément du groupe $\mathrm{Ant}^2(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P}))$ des fonctions antisymétriques normalisées $\pi_0(\underline{P}) \times \pi_0(\underline{P}) \to \pi_1(\underline{P})$, $\xi$ et $\eta$ vérifiant la relation

(2) $\quad \xi(r,s,t) - \xi(r,t,s) + \xi(t,r,s) + \eta(r+s,t) - \eta(r,t) - \eta(s,t) = 0$

(ii) $\underline{S}$ munie des contraintes $\xi$, $\eta$ et de la contrainte d'unité $(0, id, id)$ est une Pic-catégorie, et les $\otimes$-foncteurs $(G, \breve{G})$, $(H, \breve{H})$ sont compatibles avec les contraintes d'associativité, de commutativité de $\underline{P}$ et $\underline{S}$

(iii) Si on change l'épinglage $(X_s, i_X)$, $\xi$ est changé en $\xi + \partial\mu$, où $\mu \in C^2(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P}))$, et $\eta$ est changé en $\eta + \mathrm{ant}(\mu)$ où

$$\mathrm{ant}(\mu)(s,t) = \mu(s,t) - \mu(t,s)$$

Démonstration.- (i) L'assertion concernant $\xi$ résulte de (§1, n°3, Prop. 8). Quant à $\eta$, il est défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X_s \otimes X_t \arrow[r, "c_{X_s, X_t}"] & X_t \otimes X_s \\
X_{s+t} \arrow[u, "i_{X_s \otimes X_t}"] \arrow[r] & X_{s+t} \arrow[u, "i_{X_s \otimes X_t}"']
\end{tikzcd}$$

$$H(\eta_{s,t}) = \gamma_{s+t}(\eta_{s,t})$$

En vertu de la définition d'un épinglage (§1, n°3, Déf. 5) et de la compatibilité des contraintes de commutativité $c$ et d'unité de $\underline{P}$, la fonction $\eta : \Pi_0(\underline{P}) \times \Pi_0(\underline{P}) \longrightarrow \Pi_1(\underline{P})$ est bien normalisée. L'autocompatibilité de la contrainte de commutativité $\eta$ s'exprime par la formule

$$\eta(s,t) + \eta(t,s) = 0$$

qui donne $\eta \in \mathrm{Ant}^2(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P}))$. Enfin l'axiome de l'hexagone (Chap. I, §3, n°1, Déf. 1) qui exprime la compatibilité des contraintes d'associativité et de commutativité donne la relation (2).

(ii) La catégorie $\underline{S}$ munie des contraintes d'associativité $\xi$ et d'unité $(0, id, id)$ est déjà une Gr-catégorie (§1, n°3, Prop. 9). La contrainte de commutativité $\eta$ pour $\underline{S}$ est bien compatible avec $\xi$ en vertu de (2), ce qui montre que $\underline{S}$ est donc Pic-catégorie. Enfin les $\otimes$-foncteurs

$(G,\breve{G})$, $(H,\breve{H})$, déjà compatibles avec les contraintes d'associativité $a$, $\xi$ et d'unité $(1, g, d)$, $(0, id, id)$ (§1, n°3, Prop. 9), le sont aussi avec les contraintes de commutativité $c$, $\eta$ en vertu de $\eta = H^{*}c$ et de (Chap. I, §5, n°1, Prop. 5).

(iii) Si on change l'épinglage $(X_S, i_X)$ en l'épinglage $(X'_S, i'_X)$, $(G,\breve{G})$, $(H,\breve{H})$, $\xi$, $\eta$ sont alors changés en $(G',\breve{G}')$, $(H',\breve{H}')$, $\xi'$, $\eta'$. Par le même raisonnement que dans la proposition 10 du (§1, n°3), on obtient le $\otimes$-foncteur

$$(G'_\circ H\,,\ \breve{G'_\circ H}) : (\underline{S}, \xi, \eta) \longrightarrow (\underline{S}, \xi', \eta') \quad \text{avec } G'_\circ H = id_{\underline{S}}$$

compatible avec les contraintes d'associativité $\xi$, $\xi'$ et les contraintes de commutativité $\eta$, $\eta'$. D'où en posant $\mu = \breve{G'_\circ H}$, on obtient $\xi' = \xi + \partial\mu$ et $\eta' = \eta + \mathrm{ant}(\mu)$ (Chap. I, §4, n°2, Déf. 3 et 4). Le fait que $\mu$ est normalisé vient de (§1, n°3, For. (14) et (15)) et de la fonctorialité de $g$, $d$.

Considérons maintenant une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ et la catégorie $\underline{P}$ dont les objets sont les objets inversibles de $\underline{C}$ et dont $\mathrm{Hom}_{\underline{P}}((X,Y) = \mathrm{Hom}_{isom}(X,Y)$ pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$, c'est constitué des isomorphismes de $X$ dans $Y$ de la catégorie $\underline{C}$. Comme $X \otimes Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ (Chap. I, §3, n°5, Prop. 34) et $f \otimes g \in \mathrm{Fl}\,\underline{P}$ pour $f, g \in \mathrm{Fl}\,\underline{P}$, la catégorie $\underline{P}$ munie de la loi induite $\otimes$ et des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité de $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie ACU. On vérifie aussitôt que c'est une Pic.-catégorie. Le choix d'un épinglage de $\underline{P}$ nous permet de munir la $\otimes$-catégorie réduite $\underline{S}$ de $\underline{P}$ d'une structure de Pic.-catégorie au moyen des $\otimes$-équivalences

$$(G,\breve{G}) : \underline{P} \longrightarrow \underline{S}\ ,\ (H,\breve{H}) : \underline{S} \longrightarrow \underline{P}.$$

En vertu de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} GX \otimes GX & \xrightarrow{\eta} & GX \otimes GX \\ {\scriptstyle \check{G}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \check{G}} \\ G(X \otimes X) & \xrightarrow[G(c)]{} & G(X \otimes X) \end{array}$$

où c est la contrainte de commutativité pour $\underline{P}$ et $\eta$ la contrainte de commutativité pour $\underline{S}$, induite par $(H, \check{H})$ ; la Pic.-catégorie $\underline{P}$ est stricte si et seulement si la Pic.-catégorie $\underline{S}$ est stricte.

Cela étant, proposons-nous de démontrer une proposition pour la $\otimes$.-catégorie ACU $\underline{C}$ que nous avons laissé sans démonstration dans (Chap. I, §3, n°5) au moyen de la Pic.-catégorie $\underline{S}$.

<u>Proposition 3</u>.- Soit $\underline{C}$ une $\otimes$.-catégorie ACU stricte avec comme contrainte ACU : $(a, c, (\underline{1}, g, d))$. Soient $p_X : X \otimes X^{-1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}$, $t_X : X^{-1} \otimes X \xrightarrow{\sim} \underline{1}$ des isomorphismes. Alors la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} X^{-1} \otimes (X \otimes X^{-1}) \arrow[rr, "a_{X^{-1}, X, X^{-1}}"] \arrow[d, "id \otimes p_X"'] & & (X^{-1} \otimes X) \otimes X^{-1} \arrow[d, "t_X \otimes id"] \\ X^{-1} \otimes \underline{1} & & \underline{1} \otimes X^{-1} \\ & X^{-1} \arrow[ul, "d_{X^{-1}}"] \arrow[ur, "g_{X^{-1}}"'] & \end{tikzcd}$$

est équivalente à la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} X \otimes X^{-1} \arrow[rr, "c_{X, X^{-1}}"] \arrow[dr, "p_X"'] & & X^{-1} \otimes X \arrow[dl, "t_X"] \\ & \underline{1} & \end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.- Posons $s = \mathrm{cl}\, X$, par conséquent $-s = \mathrm{cl}\, X^{-1}$. Prenons dans la Pic.-catégorie $\underline{P}$, construite à partir de $\underline{C}$ comme ci-dessus, un épinglage tel que

$$X_s = X\ ,\ X_{-s} = X^{-1}\ ,\ i_{X\otimes X^{-1}} = r_X^{-1}\ ,\ i_{X^{-1}\otimes X} = t_X^{-1}$$

Dans ces conditions, en notant toujours par $\xi = H^*a$, $\eta = H^*c$ les contraintes d'associativité et de commutativité induites par $(H, \check{H})$ pour $\underline{S}$ on a $\xi(-s,s,-s)$ et $\eta(s,-s)$ définis par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
X^{-1}\otimes(X\otimes X^{-1}) \arrow[r, "a_{X^{-1},X,X^{-1}}"] \arrow[d, "id\otimes r_X"'] & (X^{-1}\otimes X)\otimes X^{-1} \arrow[d, "t_X\otimes id"] \\
X^{-1}\otimes \underline{1} & \underline{1}\otimes X^{-1} \\
X^{-1} \arrow[u, "d_{X^{-1}}"] \arrow[r, "H(\xi(-s,s,-s))"'] & X^{-1} \arrow[u, "g_{X^{-1}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X\otimes X^{-1} \arrow[r, "c_{X,X^{-1}}"] \arrow[d, "r_X"'] & X^{-1}\otimes X \arrow[d, "t_X"] \\
\underline{1} \arrow[r, "H(\eta(s,-s))"'] & \underline{1}
\end{tikzcd}$$

(voir §1, n°3, Prop. 8 et §2, n°1, Prop. 2). Tout revient donc à démontrer que $\xi(-s,s,-s) = 0$ si et seulement si $\eta(s,-s) = 0$. Ecrivons la relation (2) pour $z = t = -s$ :

$$\xi(-s,s,-s) - \xi(-s,-s,s) + \xi(-s,-s,s) + \eta(0,-s) - \eta(-s,-s) - \eta(s,-s) = 0\ ,$$

on en tenant compte de $\eta(0,-s) = 0$ ($\eta$ est normalisé (Prop. 2)) et de $\eta(-s,-s) = 0$ ($\underline{C}$ est stricte, par conséquent il en est de même de $\underline{P}$ donc de $\underline{S}$), on obtient $\xi(-s,s,-s) = \eta(s,-s)$, d'où l'assertion.

## 2. Structure des Pic-catégories.

__Définition 2__ - Soient M, N des groupes abéliens. Un __préépinglage de type (M, N)__ pour une Pic-catégorie $\underline{P}$ est un couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\underline{P})\ ,\quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\underline{P}).$$

Une __Pic-catégorie préépinglée de type (M, N)__ est une Pic-catégorie munie d'un préépinglage. Un *morphisme* de Pic-catégorie préépinglée de type (M, N) $(\underline{P}, E) \longrightarrow (\underline{P}', E')$ est un $\otimes$-foncteur $(F, \breve{F}) : \underline{P} \to \underline{P}'$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité, et tel que les triangles (23) soient commutatifs. Un tel morphisme est une $\otimes$-équivalence, donc l'ensemble des classes d'équivalence de Pic-catégories préépinglées de type (M, N) est égal à l'ensemble des composantes connexes de la catégorie des Pic-catégories préépinglées de type (M, N).

Pour formuler les propositions qui suivent, introduisons deux complexes de groupes abéliens :

$$L_\cdot(M) : L_3(M) \xrightarrow{d_3} L_2(M) \xrightarrow{d_2} L_1(M) \xrightarrow{d_1} L_0(M) \xrightarrow{\tau} M$$

$${}'L_\cdot(M) : {}'L_3(M) \xrightarrow{{}'d_3} {}'L_2(M) \xrightarrow{{}'d_2} {}'L_1(M) \xrightarrow{{}'d_1} {}'L_0(M) \xrightarrow{{}'\tau} M$$

où M est un groupe abélien et

$$L_0(M) = {}'L_0(M) = \mathbb{Z}[M]$$

$$L_1(M) = {}'L_1(M) = \mathbb{Z}[M \times M]$$

$$L_2(M) = {}'L_2(M) = \mathbb{Z}[M \times M \times M] + \mathbb{Z}[M \times M]$$

$$L_3(M) = {}'L_3(M) + \mathbb{Z}[M]$$

$${}'L_3(M) = \mathbb{Z}[M \times M \times M \times M] + \mathbb{Z}[M \times M \times M] + \mathbb{Z}[M \times M]$$

$$d_1[x, y] = {}'d_1[x, y] = [y] - [x+y] + [x]$$

$$d_2[x, y] = {}'d_2[x, y] = [x, y] - [y, x]$$

$$d_2[x, y, z] = {}'d_2[x, y, z] = [y, z] - [x+y, z] + [x, y+z] - [x, y]$$

$$d_3[x, y, z, t] = {}'d_3[x, y, z, t] = [y, z, t] - [x+y, z, t] + [x, y+z, t] - [x, y, z+t] + [x, y, z]$$

$$d_3[x, y, z] = {}'d_3[x, y, z] = [x, y, z] - [x, z, y] + [z, x, y] - [y, z] + [x+y, z] - [x, z]$$

$d_3[x,y] = {}'d_3[x,y] = [x,y] + [y,x]$

$d_3[x] = [x,x]$

$\tau[x] = {}'\tau[x] = x$ ,

les $\mathbb{Z}[M^i]$ étant les groupes abéliens libres engendrés par $M^i$ $(i=1,2,3,4)$. Puisque $L_i$ (resp. $'L_i$) est libre, un homomorphisme du groupe $L_i$ (resp. $'L_i$) dans un groupe abélien $N$ est uniquement déterminé par ses valeurs sur les générateurs. D'où les complexes $\mathrm{Hom}(L.(M), N)$, $\mathrm{Hom}('L.(M), N)$ sont identifiés aux complexes suivants

$$\mathrm{Hom}(L.(M),N) : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,N) \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{Hom}(M\times M, N) \xrightarrow{\delta_2}$$
$$\xrightarrow{\delta_2} \mathrm{Hom}(M\times M\times M, N) \times \mathrm{Hom}(M\times M, N) \xrightarrow{\delta_3}$$
$$\xrightarrow{\delta_3} \mathrm{Hom}(M\times M\times M\times M, N) \times \mathrm{Hom}(M\times M\times M, N) \times \mathrm{Hom}(M\times M, N) \times \mathrm{Hom}(M,N)$$

$$\mathrm{Hom}('L.(M),N) : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,N) \xrightarrow{'\delta_1} \mathrm{Hom}(M\times M, N) \xrightarrow{'\delta_2}$$
$$\xrightarrow{'\delta_2} \mathrm{Hom}(M\times M\times M, N) \times \mathrm{Hom}(M\times M, N) \xrightarrow{'\delta_3}$$
$$\xrightarrow{'\delta_3} \mathrm{Hom}(M\times M\times M\times M, N) \times \mathrm{Hom}(M\times M\times M, N) \times \mathrm{Hom}(M\times M, N)$$

où $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N)$ est le groupe des homomorphismes du groupe $M$ dans le groupe $N$, $\mathrm{Hom}(M^i, N)$ $(i=1,2,3,4)$ le groupe des applications de $M^i$ dans $N$, et

$\delta_1 f = {}'\delta_1 f$ , $\delta_1 f(x,y) = f(y) - f(x+y) + f(x)$ ;

$\delta_2 g = {}'\delta_2 g = (h_1, h_2)$ avec $h_1(x,y,z) = g(y,z) - g(x+y,z) + g(x,y+z) -$ $- g(x,y)$, et $h_2(x,y) = g(x,y) - g(y,x)$ ;

$\delta_3(k_1, k_2) = (l_1, l_2, l_3, l_4)$ , $'\delta_3(k_1,k_2) = (l_1, l_2, l_3)$ avec

$l_1(x,y,z,t) = k_1(y,z,t) - k_1(x+y,z,t) + k_1(x,y+z,t) - k_1(x,y,z+t) +$ $+ k_1(x,y,z)$ , $l_2(x,y,z) = k_1(x,y,z) - k_1(x,z,y) + k_1(z,x,y) - k_2(y,z) +$

$+ k_2(x+y, z) - k_2(x, z)$, $l_3(x,y) = k_2(x,y) + k_2(y,x)$, et $l_4(x) = k_2(x,x)$.

<u>Proposition 4.</u>- Le complexe $L.(M)$ est une "résolution tronquée" de $M$, en d'autres termes la suite $L_3 \to L_2 \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$ est exacte.

<u>Démonstration.</u>- Une preuve de l'exactitude en degrés 0 et 1 se trouve dans [9]. D'autre part, les $L_i$ étant libres, l'exactitude de $L.(M)$ est équivalente à l'exactitude des complexes $\mathrm{Hom}(L.(M), N)$ pour $N$ un groupe abélien <u>arbitraire</u>. Prouvons l'exactitude en degré 2 pour le complexe $\mathrm{Hom}(L.(M), N)$. Soit $(k_1, k_2) \in \mathrm{Ker}\, \delta_3$, i.e

$$k_1(y,z,t) - k_1(x+y,z,t) + k_1(x,y+z,t) - k_1(x,y,z+t) + k_1(x,y,z) = 0$$

$$k_1(x,y,z) - k_1(x,z,y) + k_1(z,x,y) - k_2(y,z) + k_2(x+y,z) - k_2(x,z) = 0$$

$$k_2(x,y) + k_2(y,x) = 0$$

$$k_2(x,x) = 0,$$

Puisque $k_2(x,y) + k_2(y,x) = 0$ et $k_2(x,x) = 0$ ; il existe $g \in \mathrm{Hom}(M \times M, N)$ tel que $k_2(x,y) = g(x,y) - g(y,x)$, i.e $k_2 = \mathrm{ant}\, g$. Par conséquent $(k_1, k_2)$ est cohomologue à $(k_1 - \partial g, k_2 - \mathrm{ant}\, g) = (k_1 - \partial g, 0)$ où $\partial g(x,y,z) = g(y,z) - g(x+y,z) + g(x,y+z) - g(x,y)$ est un cobord au sens de la cohomologie des groupes. Posons $f = k_1 - \partial g$. Puisque $(f, 0) \in \mathrm{Ker}\, \delta_3$, nous avons, en vertu de la définition de l'homomorphisme de cobord $\delta_3$, $\partial f = 0$ ($\partial$ étant l'homomorphisme de cobord défini par la relation (18) dans (§1, n°3)) et $f(x,y,z) - f(x,z,y) + f(z,x,y) = 0$. Or Mac Lane a démontré que

$$H^3_S(M,N) = Z^3_S(M,N) / \partial C^2_S(M,N) = 0$$

où $Z^3_S(M,N)$ (resp. $C^2_S(M,N)$) est le groupe des 3-cocycles (resp. 2-cochaînes) (au sens de la cohomologie des groupes) <u>symétriques</u>, i.e qui vérifient la relation

$$f(x,y,z) - f(x,z,y) + f(z,x,y) = 0 \quad (\text{resp. } g(x,y) = g(y,x)).$$

On en déduit donc pour $(f,0) \in \operatorname{Ker} \delta_3$

$$(f,0) = (\partial u, \operatorname{ant} u) \quad , \quad u \in C^2_S(M,N)$$

et par suite $(f,0) \in \operatorname{Im} \delta_2$ ; ce qui implique $(k_1,k_2) \in \operatorname{Im} \delta_2$. D'où l'exactitude de $\operatorname{Hom}(L.(M),N)$. On vérifie aussitôt que le complexe reste encore exact quand on impose la condition de normalisation aux cochaînes, i.e.

$f(0) = 0 \quad , \quad f \in \operatorname{Hom}(M,N)$

$g(0,x_2) = g(x_1,0) = 0 \quad , \quad g \in \operatorname{Hom}(M \times M, N)$

$h(0,x_2,x_3) = h(x_1,0,x_3) = h(x_1,x_2,0) = 0 \; , \; h \in \operatorname{Hom}(M \times M \times M, N)$

$k(0,x_2,x_3,x_4) = k(x_1,0,x_3,x_4) = k(x_1,x_2,0,x_4) =$

$= k(x_1,x_2,x_3,0) = 0 \; , \; k \in \operatorname{Hom}(M \times M \times M \times M, N)$.

Dans ce qui suit on suppose que les cochaînes dans les complexes $\operatorname{Hom}(L.(M),N)$, $\operatorname{Hom}('L.(M),N)$ sont normalisées. En nous servant de la proposition 2 (n°1), nous démontrons comme dans (§1, n°3, Prop. 13) la proposition suivante

<u>Proposition 5</u>.- Il y a une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équivalence de ~~catégories~~ Pic-catégories préépinglées de type $(M,N)$ et l'ensemble $H^2(\operatorname{Hom}('L.(M),N))$.

<u>Démonstration</u>.- Soient $(\underline{P}, \mathcal{E})$ une Pic-catégorie préépinglée de type $(M,N)$ et $(X_S, i_X)$ un épinglage de $\underline{P}$. Soient $\underline{S}$ la $\otimes$-catégorie réduite de $\underline{P}$, $(G,\breve{G}) : \underline{P} \to \underline{S}$, $(H,\breve{H}) : \underline{S} \to \underline{P}$ les $\otimes$-équivalences canoniques déterminées par l'épinglage $(X_S, i_X)$. Soit $(\xi, \eta)$ la contrainte AC induite par $(H,\breve{H})$ pour la $\otimes$-catégorie $\underline{S}$. Enfin soit $\underline{I}$ la $\otimes$-catégorie construite à partir du groupe $M$ et du $M$-module $N$ (trivial). Le couple $(\mathcal{E}, id)$ est un $\otimes$-foncteur de la $\otimes$-catégorie $\underline{I}$ dans la $\otimes$-catégorie $\underline{S}$, et $(\mathcal{E}^{-1}, id)$ son inverse. $(\mathcal{E}, id)$ induit les contraintes d'associativité $\alpha = \mathcal{E}_1^{-1}(\xi)$, d'unité $(0, id, id)$, de commutativité $\beta = \mathcal{E}_1^{-1}(\eta)$

$\underline{T}$ devient une Pic - catégorie et $(E, id)$ un $\otimes$ - foncteur compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité de $\underline{S}$ et $\underline{T}$.

Donc à chaque Pic - catégorie $\underline{P}$ préépinglée de type $(M, N)$ nous avons fait correspondre un élément $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Ker}\ '\delta_3$ du complexe $\mathrm{Hom}\,('L.(M), N)$. Un changement d'épinglage de $\underline{P}$ fait varier $(\alpha, \beta)$ en $(\alpha + \partial u, \beta + \mathrm{ant}\, u)$, $(\partial u, \mathrm{ant}\, u) \in \mathrm{Im}\ '\delta_2$ (n° 1, Prop. 2). D'où l'application $(\underline{P}, \varepsilon) \mapsto$ $\longrightarrow \theta_{(\underline{P}, \varepsilon)} = \overline{(\alpha, \beta)} \in H^2(\mathrm{Hom}\,('L.(M), N))$. De la même manière que dans (§1, n° 3, Prop. 13), nous démontrons que cette application induit une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de Pic - catégories préépinglées de type $(M, N)$ et l'ensemble $H^2(\mathrm{Hom}\,('L.(M), N))$.

<u>Proposition 6</u>. — La classification des Pic - catégories préépinglées de type $(M, N)$ qui sont <u>stricte</u> est triviale.

<u>Démonstration</u>. — Soit $(\underline{P}, \varepsilon)$ une Pic - catégorie stricte, préépinglée de type $(M, N)$ et soit $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Ker}\ '\delta_3$ l'élément correspondant. Puisque $\underline{P}$ est stricte, on a $\beta(x, x) = 0$ pour tout $x \in M$. Par conséquent $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Ker}\ \delta_3$ du complexe $\mathrm{Hom}\,(L.(M), N)$. D'où il y a une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence des Pic - catégories ~~préépinglées~~ de type $(M, N)$ qui sont strictes et l'ensemble $H^2(\mathrm{Hom}\,(L.(M), N))$. Or $H^2(\mathrm{Hom}\,(L.(M), N)) = 0$ d'après la proposition 4.

<u>Corollaire 1</u>. — Soient $\underline{P}$ et $\underline{P}'$ deux Pic - catégories strictes. Alors il existe une $\otimes$ - équivalence $(F, \breve{F}) : \underline{P} \longrightarrow \underline{P}'$ compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité de $\underline{P}$ et $\underline{P}'$ si et seulement s'il existe des isomorphismes $\lambda_0 : \pi_0(\underline{P}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\underline{P}')$, $\lambda_1 : \pi_1(\underline{P}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\underline{P}')$.

<u>Démonstration</u>. — Supposons qu'il existe une $\otimes$ - équivalence $(F, \breve{F})$ : $\underline{P} \longrightarrow \underline{P}'$ compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité de $\underline{P}$ et $\underline{P}'$. En vertu de (§1, n° 3, Prop. 12), il existe des isomor-

phismes $\lambda_0 : \Pi_0(\underline{P}) \xrightarrow{\sim} \Pi_0(\underline{P}')$, $\lambda_1 : \Pi_1(\underline{P}) \xrightarrow{\sim} \Pi_1(\underline{P}')$.

Inversement supposons qu'il existe des isomorphismes $\lambda_0 : \Pi_0(\underline{P}) \xrightarrow{\sim} \Pi_0(\underline{P}')$, $\lambda_1 : \Pi_1(\underline{P}) \xrightarrow{\sim} \Pi_1(\underline{P}')$. Dans ce cas on peut considérer le couple $id = (id_{\Pi_0(\underline{P})}, id_{\Pi_1(\underline{P})})$ comme un préépinglage de type $(\Pi_0(\underline{P}), \Pi_1(\underline{P}))$ pour la Pic-catégorie $\underline{P}$, et le couple $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$ comme un préépinglage de même type que $\underline{P}$, pour la Pic-catégorie $\underline{P}'$. Comme la catégorie des Pic-catégories, préépinglés de même type et strictes, est connexe d'après la proposition 6, on en déduit l'existence d'une $\otimes$-équivalence $(F, \breve{F}) : \underline{P} \to \underline{P}'$ compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité de $\underline{P}$ et $\underline{P}'$.

<u>Corollaire 2</u>.– Si dans N la relation $2y = 0$ entraîne $y = 0$, alors la classification des Pic-catégories préépinglés de type $(M, N)$ est triviale.

<u>Démonstration</u>.– Dans ce cas toutes les Pic-catégories de type $(M, N)$ sont strictes, d'où le corollaire en appliquant la proposition 6.

<u>Définition 3</u>.– Soient A, B des groupes abéliens, f une application du groupe produit $A^n$ dans B. L'<u>antisymétrisé</u> de f est une application, noté af, de $A^n$ dans B, définie par

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} s_\sigma \, f(x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}, \dots, x_{\sigma n})$$

où $\mathfrak{S}_n$ est le groupe symétrique, $s_\sigma$ la signature de la permutation $\sigma$.

<u>Définition 4</u>.– Chaque élément $(\alpha, \beta) \in \operatorname{Ker} {}'\delta_3$ du complexe $\operatorname{Hom}({}'L(M), N)$ est appelé une <u>structure de Pic-catégorie préépinglé de type $(M, N)$</u>. Deux structures de Pic-catégorie préépinglé de type $(M, N)$ $(\alpha, \beta)$, $(\alpha', \beta')$ sont dites <u>cohomologues</u> si et seulement si $\overline{(\alpha, \beta)} = \overline{(\alpha', \beta')}$. Une structure de Pic-catégorie $(\alpha, \beta)$ est dite <u>stricte</u> si $\beta(x, x) = 0$ pour tout $x \in M$.

voir fin §
...
$\beta$
...

<u>Proposition 7</u>.– Soit $(\alpha, \beta)$ une structure de Pic-catégorie préépinglé de type $(M, N)$. Alors l'antisymétrisé $a\alpha$ de $\alpha$ et l'application $x \mapsto \beta(x, x)$

est un homomorphisme du groupe M dans le groupe ${}_2N$, ${}_2N$ étant le sous-groupe de N contenant les éléments $y \in N$ tels que $2y = 0$.

Démonstration. – Puisque $(\alpha, \beta) \in \operatorname{Ker} \delta'_3$, nous avons les relations

$$(3)\quad \alpha(x_2, x_3, x_4) - \alpha(x_1+x_2, x_3, x_4) + \alpha(x_1, x_2+x_3, x_4) - \alpha(x_1, x_2, x_3+x_4) + \alpha(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$(4)\quad \alpha(x_1, x_2, x_3) - \alpha(x_1, x_3, x_2) + \alpha(x_3, x_1, x_2) = \beta(x_2, x_3) - \beta(x_1+x_2, x_3) + \beta(x_1, x_3)$$

$$(5)\quad \beta(x_1, x_2) + \beta(x_2, x_1) = 0$$

pour $x_1, x_2, x_3, x_4 \in M$. En permutant $x_1, x_2$ dans (4) nous obtenons

$$\alpha(x_2, x_1, x_3) - \alpha(x_2, x_3, x_1) + \alpha(x_3, x_2, x_1) = \beta(x_1, x_3) - \beta(x_1+x_2, x_3) + \beta(x_2, x_3)$$

ce qui donne

$$2\alpha(x_1, x_2, x_3) = \alpha(x_1, x_2, x_3) - \alpha(x_1, x_3, x_2) + \alpha(x_3, x_1, x_2) - \alpha(x_2, x_1, x_3) + \alpha(x_2, x_3, x_1) - \alpha(x_3, x_2, x_1) = 0.$$

Ensuite dans (4) faisons successivement $x_1 = x_3 = x$, $x_2 = y$ ; $x_1 = x_3 = y$, $x_2 = x$ ; $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = x+y$ ; nous obtenons

$$\alpha(x, y, x) = \beta(y, x) - \beta(x+y, x) + \beta(x, x)$$

$$\alpha(y, x, y) = \beta(x, y) - \beta(x+y, y) + \beta(y, y)$$

$$\alpha(x, y, x+y) - \alpha(x, x+y, y) + \alpha(x+y, x, y) = \beta(y, x+y) - \beta(x+y, x+y) + \beta(x, x+y)$$

ce qui donne

$$\alpha(y, x, y) - \alpha(x+y, x, y) + \alpha(x, x+y, y) - \alpha(x, y, x+y) + \alpha(x, y, x) =$$
$$= \beta(x, y) - \beta(x+y, y) + \beta(y, y) - [\beta(y, x+y) - \beta(x+y, x+y) + \beta(x, x+y)] +$$
$$+ \beta(y, x) - \beta(x+y, x) + \beta(x, x)$$

Or le premier membre de la relation est nul en vertu de (3) et le second égal à $\beta(x,x)+\beta(y,y)-\beta(x+y,x+y)$ en vertu de (5) ; ce qui montre que l'application $x \mapsto \beta(x,x)$ est un homomorphisme. On peut démontrer cette dernière assertion d'une manière autrement. Pour cela, considérons une Pic-catégorie $(\underline{P},\varepsilon)$ préépinglée de type $(M,N)$ qui correspond au couple $(\alpha,\beta)$ dans l'application de la proposition 5. Dans $\underline{P}$, prenons quatre objets $X_1, X_2, X_3, X_4$ tels que $X_1 = X_3 = X$, $X_2 = X_4 = Y$. En vertu de (Chap. I, §3, n° 1, Prop. 7) nous avons la commutativité du diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
 & (X_1\otimes X_2)\otimes(X_3\otimes X_4) \arrow[dl, "a_{X_1\otimes X_2, X_3, X_4}"'] \arrow[dr, "c_{X_1\otimes X_2, X_3\otimes X_4}"] & \\
((X_1\otimes X_2)\otimes X_3)\otimes X_4 \arrow[d, "a^{-1}_{X_1,X_2,X_3}\otimes id"'] & & (X_3\otimes X_4)\otimes(X_1\otimes X_2) \arrow[d, "a_{X_3\otimes X_4, X_1, X_2}"] \\
(X_1\otimes(X_2\otimes X_3))\otimes X_4 \arrow[d, "(id\otimes c_{X_2,X_3})\otimes id"'] & & ((X_3\otimes X_4)\otimes X_1)\otimes X_2 \arrow[d, "a^{-1}_{X_3,X_4,X_1}\otimes id"] \\
(X_1\otimes(X_3\otimes X_2))\otimes X_4 \arrow[d, "a_{X_1,X_3,X_2}\otimes id"'] & & (X_3\otimes(X_4\otimes X_1))\otimes X_2 \arrow[d, "(id\otimes c_{X_4,X_1})\otimes id"] \\
((X_1\otimes X_3)\otimes X_2)\otimes X_4 \arrow[d, "(c_{X_1,X_3}\otimes id)\otimes id"'] & & (X_3\otimes(X_1\otimes X_4))\otimes X_2 \arrow[d, "a_{X_3,X_1,X_4}\otimes id"] \\
((X_3\otimes X_1)\otimes X_2)\otimes X_4 \arrow[d, "a^{-1}_{X_3\otimes X_1, X_2, X_4}"'] & & ((X_3\otimes X_1)\otimes X_4)\otimes X_2 \arrow[d, "a^{-1}_{X_3\otimes X_1, X_4, X_2}"] \\
(X_3\otimes X_1)\otimes(X_2\otimes X_4) \arrow[rr, "id\otimes c_{X_2,X_4}"] & & (X_3\otimes X_1)\otimes(X_4\otimes X_2)
\end{tikzcd}
$$

ce qui donne, en posant $x = \varepsilon_0^{-1}(cl\, X)$, $y = \varepsilon_0^{-1}(cl\, Y)$

$$
\begin{aligned}
&\alpha(x+y,x,y) - \alpha(x,y,x) + \beta(y,x) + \alpha(x,x,y) + \beta(x,x) - \\
&- \alpha(2x,y,y) + \beta(y,y) + \alpha(2x,y,y) - \alpha(x,x,y) - \beta(y,x) + \\
&+ \alpha(x,y,x) - \alpha(x+y,x,y) - \beta(x+y,x+y) = 0
\end{aligned}
$$

ou après simplification

$$\beta(x,x) + \beta(y,y) - \beta(x+y,\, x+y) = 0.$$

<u>Proposition 8</u>.– Le noyau de l'application $\overline{(\alpha,\beta)} \mapsto \bar{\alpha}$ du groupe $H^2(\mathrm{Hom}\,('L.(M),N))$ dans le groupe $H^3(M,N)$ s'identifie au groupe

$$\mathrm{Linant}^2(M,N) \,/\, \mathrm{ant}\,(Z^2(M,N))$$

des applications bilinéaires alternées $M \times M \to N$, modulo celles de la forme ant $u$ où $u \in Z^2(M,N)$.

<u>Démonstration</u>.– Soit $\overline{(\alpha,\beta)} \in H^2(\mathrm{Hom}\,('L.(M),N))$ tel que $\bar{\alpha} = 0$, i.e $\alpha = \partial f$, $f \in C^2(M,N)$. Nous avons

$$\overline{(\alpha,\beta)} = \overline{(\partial f,\beta)} = \overline{(\partial f - \partial f,\ \beta - \mathrm{ant} f)} = \overline{(0,g)}\ , \quad g = \beta - \mathrm{ant}\, f$$

En vertu des relations (4) et (5), $g$ est bilinéaire alterné. D'où le noyau de l'application se compose des éléments $\overline{(0,g)}$ avec $g$ bilinéaire alterné. De plus

$$\overline{(0,g)} = \overline{(0,g')} \iff \exists\, u \in C^2(M,N)\ ,\ \partial u = 0 \text{ et } g - g' = \mathrm{ant}\, u$$

d'où la proposition en remarquant que les éléments de ant $(Z^2(M,N))$ sont des applications bilinéaires alternées $M \times M \to N$.

<u>Proposition 9</u>.– Il y a un monomorphisme $j$ de $\mathrm{Linant}^2(M,N)/\mathrm{ant}\,(Z^2(M,N))$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$.

<u>Démonstration</u>.– Considérons l'homomorphisme

$$\mathrm{Linant}^2(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$$
$$f \longmapsto \varphi,\quad \varphi(x) = f(x,x)\ ,\ x \in M$$

Le noyau de cette application se compose des applications bilinéaires alternées $f$ telles que $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in M$. En vertu des relations (3), (4), (5), $(0,f)$ est une structure de Pic-catégorie prépinglée de type $(M,N)$ qui est stricte puisque $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in M$. Or le complexe $\mathrm{Hom}(L.(M),N)$ est exact, ce qui donne $(0,f) = (\partial u, \mathrm{ant}\, u)$ avec $\partial u = 0$. On en conclut que le noyau est $\mathrm{ant}(Z^2(M,N))$. Cet homomorphisme induit donc le monomorphisme

$$j : \mathrm{Linant}^2(M,N)/\mathrm{ant}(Z^2(M,N)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$$

! dire l'état de la question !

Proposition 10.. Si M est libre, $j$ est un isomorphisme

Démonstration.. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de M et soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$. Nous construisons une application $f : M \times M \to N$ de la manière suivante

$$f(e_i, e_i) = \varphi(e_i)\ ,\quad f(e_i, e_k) = 0 \quad \text{pour } i \neq k\ ,$$

$$f(x,y) = \sum m_i n_k f(e_i, e_k) \quad \text{pour } x = \sum m_i e_i\ ,\ y = \sum n_k e_k\ .$$

Il est clair que $f$ est bilinéaire alterné et $f(x,x) = \varphi(x)$, d'où la proposition.

Corollaire.. Si M est libre, alors $\mathrm{Linant}^2(M,N)/\mathrm{ant}(Z^2(M,N)) = 0$ si et seulement si ${}_2N = 0$.

Démonstration.. Si ${}_2N = 0$, il est clair que $\mathrm{Linant}^2(M,N)/\mathrm{ant}(Z^2(M,N))$ $= 0$. Inversement, $\mathrm{Linant}^2(M,N)/\mathrm{ant}(Z^2(M,N)) = 0$ implique $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$ $= 0$ et par suite ${}_2N = 0$ puisque M est libre.

Proposition 11.. Il y a un monomorphisme

$$h : H^2(\mathrm{Hom}('L.(M), N)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$$

qui est un isomorphisme si M est libre.

Démonstration.. Soit $(\alpha, \beta)$ une structure de Pic-catégorie prépinglée de type $(M,N)$. En vertu de la proposition 7, l'application $x \mapsto \beta(x,x)$ appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$. De plus deux structures cohomologues $(\alpha, \beta)$, $(\alpha', \beta')$ définissent une même application $x \mapsto \beta(x,x) = \beta'(x,x)$. On obtient un homomorphisme $h$ de $H^2(\mathrm{Hom}(\,'L.(M), N))$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$ en posant $h(\overline{\alpha, \beta})(x) = \beta(x, x)$, $x \in M$. Le noyau de $h$ est donc $H^2(\mathrm{Hom}(L.(M), N))$ qui est nul en vertu de la proposition 4.

Supposons $M$ libre et soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$. En vertu de la proposition 10, il existe $f \in \mathrm{Linant}^2(M, N)$ tel que $f(x, x) = \varphi(x)$. Il est clair que $(0, f)$ est une structure de Pic-catégorie préépinglée de type $(M, N)$ et $h(\overline{0, f})(x) = f(x, x) = \varphi(x)$, ce qui achève la démonstration.

# Chapitre III

## Pic - enveloppe d'une $\otimes$ - catégorie ACU.

Dans ce chapitre nous nous occupons de deux problèmes universels, celui de rendre des objets "objet unité" et celui d'inverser des objets.

### §1. Le problème de rendre des objets "objet unité".

Pour pouvoir résoudre ce problème, occupons-nous du problème suivant

#### 1. Le problème de rendre des endomorphismes des identités.

de FℓA formée

Proposition 1. - Soient $\underline{A}$ une catégorie, $\mathcal{S}$ une partie d'endomorphismes ~~tels que $\mathcal{S}$ contienne toutes les identités des objets de $\underline{A}$~~. Il existe une catégorie $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ et un foncteur $H$ de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ ayant les propriétés suivantes :

1° $H(u) = id$ pour tout $u \in \mathcal{S}$ ;

2° pour tout foncteur $K$ de $\underline{A}$ dans une catégorie $\underline{B}$ tel que $K(u) = id$ pour tout $u \in \mathcal{S}$, il existe un foncteur $K'$ et un seul de $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ dans $\underline{B}$ tel que $K = K' \circ H$.

En d'autres termes, $(\underline{A}^{\mathcal{S}}, H)$ est une solution du problème universel

$$K : \underline{A} \to \underline{B} \ , \ K(u) = id \text{ pour tout } u \in \mathcal{S}.$$

Démonstration. - Soient $A, B$ des objets de $\underline{A}$ et $R_{A,B}$ une relation binaire définie dans $\mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B)$ de la manière suivante : pour $u$, $v \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B)$, on a $u \, R_{A,B} \, v$ si et seulement s'il existe un entier $n \geq 0$, des entiers strictement positifs $p_0, p_i, q_i$ $(i = 1, \dots, n)$, $q_{n+1}$, et des morphismes

$$u^{(i)} = u_1^{(i)} u_2^{(i)} \cdots u_{p_i}^{(i)} = v_1^{(i)} v_2^{(i)} \cdots v_{q_i}^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

tels que $u = u_1^{(0)} u_2^{(0)} \cdots u_{p_0}^{(0)}$, $v = v_1^{(n+1)} v_2^{(n+1)} \cdots v_{q_{n+1}}^{(n+1)}$ et

$u_1^{(j)} \varepsilon_1^{(j)} u_2^{(j)} \varepsilon_2^{(j)} \cdots \varepsilon_{p_j-1}^{(j)} u_{p_j}^{(j)} = v_1^{(j+1)} \varepsilon_1^{(j+1)} v_2^{(j+1)} \varepsilon_2^{(j+1)} \cdots$

$\cdots \varepsilon_{q_{j+1}-1}^{(j+1)} v_{q_{j+1}}^{(j+1)}$, $(j = 0, \dots, n)$ ; les $\varepsilon^{(\cdot)}$ étant des morphismes appartenant à $\mathcal{S}$. On vérifie aussitôt que $R_{A,B}$ est une relation d'équivalence dans $\mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B)$, elle est la relation d'équivalence la plus faible identifiant les flèches de $\mathcal{S}$ avec des identités. Pour $u, v \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B)$, $u', v' \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(B,C)$, $u \, R_{A,B} \, v$, $u' \, R_{B,C} \, v'$, on a aussitôt $u'u \, R_{A,C} \, u'v$, $u'v \, R_{A,C} \, v'v$, d'où $u'u \, R_{A,C} \, v'v$. Notons par $\bar{u}$ la classe d'équivalence contenant $u$,

Cela étant, posons

$$\mathrm{Ob}\, \underline{A}^{\mathcal{S}} = \mathrm{Ob}\, \underline{A}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{A}^{\mathcal{S}}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B) / R_{A,B}$$

$\underline{A}^{\mathcal{S}}$ est donc une catégorie qui est une catégorie quotient de $\underline{A}$. Le foncteur $H : \underline{A} \to \underline{A}^{\mathcal{S}}$ est défini par les applications

$$A \longmapsto A$$

$$u : A \to B \longmapsto \bar{u} : A \to B$$

Il est clair que $H(u) = id$ pour tout $u \in \mathcal{S}$. Enfin soient $\underline{B}$ une catégorie, $K : \underline{A} \to \underline{B}$ un foncteur tel que $K(u) = id$ pour tout $u \in \mathcal{S}$, le foncteur $K' : \underline{A}^{\mathcal{S}} \to \underline{B}$ défini par les applications

$$A \longmapsto KA$$

$$\bar{u} : A \to B \longmapsto Ku : KA \to KB$$

est le seul foncteur de $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ dans $\underline{B}$ tel que $K = K' \circ H$.

<u>Remarque</u>.- Quand la catégorie $\underline{A}$ est un groupoïde et $\varepsilon^{-1} \in \mathcal{S}$ pour tout $\varepsilon \in \mathcal{S}$, la relation d'équivalence $R_{A,B}$ dans $\mathrm{Hom}_{\underline{A},\underline{B}}(A,B)$ peut être

décrite plus simplement : $u, u' \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B)$, $u R_{A,B} u'$ si et seulement s'il existe $u = u_1u_2\dots u_p$, $u' = u'_1u'_2\dots u'_q$ et $u_1\varepsilon_1u_2\varepsilon_2\dots\varepsilon_{p-1}u_p = u'_1\varepsilon'_1u'_2\varepsilon'_2\dots\varepsilon'_{q-1}u'_q$, $\varepsilon_i, \varepsilon'_j \in \mathcal{S}$. En effet si cette dernière relation existe, il est clair qu'on a $u R_{A,B} u'$. Inversement supposons

$$u = u_1u_2\dots u_p,\quad v = v_1v_2\dots v_r = w_1w_2\dots w_s,\quad u' = u'_1u'_2\dots u'_q$$

et

$$u_1\varepsilon_1u_2\varepsilon_2\dots\varepsilon_{p-1}u_p = v_1\mu_1v_2\mu_2\dots\mu_{r-1}v_r,$$

$$w_1\gamma_1w_2\gamma_2\dots\gamma_{s-1}w_s = u'_1\varepsilon'_1u'_2\varepsilon'_2\dots\varepsilon'_{q-1}u'_q$$

avec $\varepsilon_., \mu_., \gamma_., \varepsilon'_. \in \mathcal{S}$. Alors on peut écrire

$$u = u_1u_2\dots u_p v_r^{-1}v_{r-1}^{-1}\dots v_2^{-1}v_2\dots v_r,$$

$$u' = u'_1u'_2\dots u'_q w_s^{-1}w_{s-1}^{-1}\dots w_2^{-1}w_2\dots w_s$$

et on a

$$u_1\varepsilon_1u_2\varepsilon_2\dots\varepsilon_{p-1}u_p v_r^{-1}\mu_{r-1}^{-1}v_{r-1}^{-1}\mu_{r-2}^{-1}\dots v_3^{-1}\mu_2^{-1}v_2^{-1}\mu_1^{-1}v_2v_3\dots v_r =$$

$$= u'_1\varepsilon'_1u'_2\varepsilon'_2\dots\varepsilon'_{q-1}u'_q w_s^{-1}\gamma_{s-1}^{-1}w_{s-1}^{-1}\gamma_{s-2}^{-1}\dots w_3^{-1}\gamma_2^{-1}w_2^{-1}\gamma_1^{-1}w_2w_3\dots w_s$$

puisque le 1er membre est égal à $v_1v_2\dots v_r$ et le 2e membre à $w_1w_2\dots w_s$.

Définition 1.- Soit $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie associative, et soit $\mathcal{E}$ la partie de $Fl\,\underline{A}$ se composant des flèches qui sont des endomorphismes. On dit qu'une partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$ est *multiplicative* si $id_X \in \mathcal{S}$ pour tout $X \in Ob\,\underline{A}$, et si le produit tensoriel de deux flèches de $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{S}$. On dit aussi que $\mathcal{S}$ est une partie multiplicative de $\underline{A}$.

de / des

Pour toute partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$, il existe des parties multiplicatives de $\mathcal{E}$

contenant $\mathcal{S}$, par exemple $\mathcal{E}$ lui-même. L'intersection de toutes ces parties est la plus petite partie multiplicative de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{S}$ ; on dit qu'elle est <u>engendrée</u> par $\mathcal{S}$. Il est immédiat que c'est l'ensemble formé de tous les produits tensoriels finis de flèches de $\mathcal{S}$ et des identités $\mathrm{Id}_X$.

<u>Proposition 2</u>.– Soient $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie AC, $(a,c)$ sa contrainte AC, $\mathcal{S}$ une partie multiplicative de $\underline{A}$. Il existe une $\otimes$-catégorie AC $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ et un $\otimes$-foncteur AC $(H,\check{H})$ de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ ayant les propriétés suivantes :

1° $H(u) = id$ pour tout $u \in \mathcal{S}$ ;

2° pour tout $\otimes$-foncteur AC $(K,\check{K})$ de la $\otimes$-catégorie AC $\underline{A}$ dans une $\otimes$-catégorie AC $\underline{B}$, tel que $K(u) = id$ pour tout $u \in \mathcal{S}$, il existe un $\otimes$-foncteur AC $(K',\check{K}')$ et un seul de $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ dans $\underline{B}$ tel que $(K,\check{K}) = (K',\check{K}')\circ(H,\check{H})$.

<u>Démonstration</u>.– Considérons la relation d'équivalence $R_{A,B}$ définie dans la proposition 1. Soient $u, v \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B)$, $u',v' \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A',B')$, $u R_{A,B} v$, $u' R_{A',B'} v'$. On a aussitôt $(u\otimes id_{B'}) R_{A\otimes B', B\otimes B'} (v\otimes id_{B'})$, et $(id_A \otimes u') R_{A\otimes A', A\otimes B'} (id_A \otimes v')$, ce qui donne

$$u\otimes u' = (u\otimes id_{B'})(id_A\otimes u')\; R_{A\otimes A', B\otimes B'}\; (v\otimes id_{B'})(id_A \otimes v') = v\otimes v'$$

D'où dans la catégorie quotient $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ (voir Prop. 1) on peut construire une loi $\otimes$ dont le produit tensoriel de deux objets de $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ est le même que celui de $\underline{A}$ et dont le produit tensoriel de deux flèches est défini par

$$\bar{u}\otimes\bar{u}' = \overline{u\otimes u'}$$

les contraintes d'associativité et de commutativité pour $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ sont $\bar{a}$ et $\bar{c}$ respectivement. Il est clair qu'elles sont compatibles. La $\otimes$-catégorie $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ est donc une $\otimes$-catégorie AC. Enfin le foncteur $H$ est défini comme dans la proposition 1 et $\check{H} = id$. Le couple $(H,\check{H})$ est ainsi un $\otimes$-foncteur AC.

Soient $\underline{B}$ une $\otimes$-catégorie AC et $(K,\check{K}) : \underline{A} \to \underline{B}$ un $\otimes$-foncteur AC tel que $K(u) = id$ pour tout $u \in \mathcal{S}$. Le $\otimes$-foncteur $(K',\check{K}') : \underline{A}^{\mathcal{S}} \to \underline{B}$ avec $K'$ défini comme dans la proposition 1 et $\check{K}' = \check{K}$ est le seul $\otimes$-foncteur AC tel que $(K,\check{K}) = (K',\check{K}') \circ (H,\check{H})$.

<u>Définition 2</u>.- Soient $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie A,C, $(a,c)$ sa contrainte AC, $\mathcal{S}$ une partie multiplicative de $\underline{A}$. On appelle <u>$\otimes$-catégorie AC quotient</u> de $\underline{A}$ définie par $\mathcal{S}$ et on désigne par $\underline{A}^{\mathcal{S}}$, la catégorie $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ définie par

$$\mathrm{Ob}\,\underline{A}^{\mathcal{S}} = \mathrm{Ob}\,\underline{A}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{A}^{\mathcal{S}}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B) / R_{A,B}$$

munie de la structure de $\otimes$-catégorie AC définie par

$$\begin{cases} A\otimes B \text{ dans } \underline{A}^{\mathcal{S}} = A\otimes B \text{ dans } \underline{A}, & A,B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}^{\mathcal{S}} \\ \bar{u}\otimes\bar{u}' = \overline{u\otimes u'}, & \bar{u},\bar{u}' \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}^{\mathcal{S}} \\ \text{contrainte AC} = (\bar{a},\bar{c}) \end{cases}$$

On appelle <u>$\otimes$-foncteur canonique</u> de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ le $\otimes$-foncteur AC :

$$A \longmapsto A$$

$$u : A \to B \longmapsto \bar{u} : A \to B.$$

On a aussitôt la proposition suivante

<u>Proposition 3</u>.- Soient $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie ACU, $(a,c,(\underline{1},g,d))$ sa contrainte ACU, $\mathcal{S}$ une partie multiplicative de $\underline{A}$. La catégorie $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ est une $\otimes$-catégorie ACU, sa contrainte d'unité étant $(\underline{1},\bar{g},\bar{d})$, et le $\otimes$-foncteur canonique de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ est un $\otimes$-foncteur ACU. La catégorie $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ et le $\otimes$-foncteur canonique de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ constitue une solution du problème universel

$$(K,\check{K}) : \underline{A} \to \underline{B}, \quad K(u) = id \text{ pour tout } u \in \mathcal{S}$$

où $\underline{B}$ est une $\otimes$-catégorie ACU et $(K, \breve{K})$ un $\otimes$-foncteur ACU.

## 2. Le problème de rendre des objets " objet unité ".

Tout d'abord, introduisons un $\otimes$-foncteur

<u>Définition 3</u>.- Soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie AC, $\underline{P}$ une $\otimes$-catégorie ACU, sa contrainte d'unité étant notée $(\underline{1}_P, g, d)$. On désigne par $(I_{\underline{P}}, \breve{I}_{\underline{P}})$ le $\otimes$-foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{P}$ défini par

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "u"'] & \underline{1}_P \arrow[d, "id_{\underline{1}_P}"] \\ Y \arrow[r, mapsto] & \underline{1}_P \end{tikzcd}$$

$$\breve{I}_{\underline{P}}(X, Y) = d^{-1} : I_{\underline{P}}(X) \otimes I_{\underline{P}}(Y) = \underline{1}_P \otimes \underline{1}_P \longrightarrow \underline{1}_P = I_{\underline{P}}(X \otimes Y)$$

pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, $u \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}$. Il est clair que $(I_{\underline{P}}, \breve{I}_{\underline{P}})$ est un $\otimes$-foncteur AC en vertu de la compatibilité des contraintes de $\underline{P}$. $(I_{\underline{P}}, \breve{I}_{\underline{P}})$ est appelé le <u>$\otimes$-foncteur $\underline{1}_P$ constant</u> de $\underline{C}$ dans $\underline{P}$.

Dans tout ce qui suit de ce n°, $\underline{A}$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC : $(a, c)$, $\underline{A}'$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC : $(a', c')$ et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, $(T, \breve{T}) : \underline{A}' \to \underline{A}$ un $\otimes$-foncteur AC. On se propose de chercher

1° Une $\otimes$-catégorie $\underline{P}$ munie des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité compatibles ;

2° Un $\otimes$-foncteur $(D, \breve{D}) : \underline{A} \to \underline{P}$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{P}$

3° Un $\otimes$-isomorphisme fonctoriel

$$\lambda : (D, \breve{D}) \circ (T, \breve{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{P}}, \breve{I}_{\underline{P}})$$

où $(I_{\underline{P}}, \breve{I}_{\underline{P}})$ est le $\otimes$-foncteur $\underline{1}_P$ constant de $\underline{A}'$ dans $\underline{P}$.

En plus, on veut que le triple $(\underline{P}, (D, \breve{D}), \lambda)$ soit universel pour les triples $(\underline{Q}, (E,\check{E}), \mu)$ vérifiant 1°, 2°, 3° ; i.e pour un triple $(\underline{Q}, (E,\check{E}), \mu)$ vérifiant 1°, 2°, 3°, il existe un $\otimes$-foncteur $(E',\check{E}')$ et un seul de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité dans $\underline{P}$ et $\underline{Q}$, tel que $(E,\check{E}) = (E',\check{E}')\circ(D,\check{D})$ et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E'(DTA') & \xrightarrow{E'(\lambda_{A'})} & E'(\underline{1}_{\underline{P}}) \\ \| & & \uparrow \hat{E}' \\ ETA' & \xrightarrow{\mu_{A'}} & \underline{1}_{\underline{Q}} \end{array}$$

soit commutatif, $\hat{E}' : \underline{1}_{\underline{Q}} \xrightarrow{\sim} E'(\underline{1}_{\underline{P}})$ étant l'isomorphisme venant de la compatibilité de $(E',\check{E}')$ avec les unités de $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ (Chap. I, §4, n°2, Déf. 5).

Nous considérons le problème d'abord au cas où $A' = \emptyset$.

<u>Proposition 4</u>.- Soit $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC : (a,c). Il existe une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$ et un $\otimes$-foncteur $(D,\check{D}) : \underline{A} \to \underline{P}$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{P}$, ayant la propriété suivante :

Pour tout $\otimes$-foncteur $(E,\check{E})$ de $\underline{A}$ dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{Q}$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité de $\underline{A}$ dans $\underline{Q}$, il existe un $\otimes$-foncteur ACU $(E',\check{E}')$ et un seul de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ tel que $(E,\check{E}) = (E',\check{E}')\circ(D,\check{D})$ et que $id = \hat{E}' : \underline{1}_{\underline{Q}} \xrightarrow{\sim} E'\underline{1}_{\underline{P}}$.

<u>Démonstration</u>.- Pour construire la catégorie $\underline{P}$, posons

$$\mathrm{Ob}\,\underline{P} = \mathrm{Ob}\,\underline{A} \cup \{\underline{1}_{\underline{P}}\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{P}}(A,B) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B), & A,B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A} \\ \emptyset, & A \in \mathrm{Ob}\,\underline{A},\ B = \underline{1}_{\underline{P}} \\ \emptyset, & A = \underline{1}_{\underline{P}},\ B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A} \\ \{id_{\underline{1}_{\underline{P}}}\}, & A = B = \underline{1}_{\underline{P}} \end{cases}$$

La composition des flèches dans $\underline{P}$ se définit de façon naturelle à l'aide de la composition des flèches dans $\underline{A}$. Nous avons ainsi une catégorie.

Pour munir $\underline{P}$ d'une $\otimes$-structure, nous définissons le foncteur $\otimes : \underline{P} \times \underline{P} \to \underline{P}$ de la manière suivante, en nous servant de la loi $\otimes$ dans $\underline{A}$

$$\begin{array}{ccc} (A,B) & \longmapsto & A\otimes B \\ {\scriptstyle (u,v)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u\otimes v} \\ (C,D) & \longmapsto & C\otimes D \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (1_{\underline{P}},A) & \longmapsto & A \\ {\scriptstyle (id,u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ (1_{\underline{P}},B) & \longmapsto & B \end{array}$$

$$A,B,C,D \in Ob\,\underline{A}$$

$$\begin{array}{ccc} (A,1_{\underline{P}}) & \longmapsto & A \\ {\scriptstyle (u,id)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ (B,1_{\underline{P}}) & \longmapsto & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (1_{\underline{P}},1_{\underline{P}}) & \longmapsto & 1_{\underline{P}} \\ {\scriptstyle (id,id)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ (1_{\underline{P}},1_{\underline{P}}) & \longmapsto & 1_{\underline{P}} \end{array} \qquad u \in Fl\,\underline{A}$$

On vérifie aussitôt que $\otimes$ ainsi défini est un foncteur. Il est clair que $a$ défini de la façon suivante

$$a_{A,B,C}\ (\text{dans } \underline{P}) = a_{A,B,C}\ (\text{dans } \underline{A})$$

$$a_{1_{\underline{P}},B,C} = id_{B\otimes C},\quad a_{A,1_{\underline{P}},C} = id_{A\otimes C},\quad a_{A,B,1_{\underline{P}}} = id_{A\otimes B}$$

$$a_{1_{\underline{P}},1_{\underline{P}},C} = id_C,\quad a_{1_{\underline{P}},B,1_{\underline{P}}} = id_B,\quad a_{A,1_{\underline{P}},1_{\underline{P}}} = id_A$$

pour $A,B,C \in Ob\,\underline{A}$ et

$$a_{1_{\underline{P}},1_{\underline{P}},1_{\underline{P}}} = id_{1_{\underline{P}}}$$

constitue une contrainte d'associativité pour $\underline{P}$. Pour la contrainte de commutativité $c$, posons

$$c_{A,B}\ (\text{dans } \underline{P}) = c_{A,B}\ (\text{dans } \underline{A})$$

$$c_{1_{\underline{P}},A} = id_A,\quad c_{A,1_{\underline{P}}} = id_A$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, et

$$c_{\underline{1}_{\underline{P}}, \underline{1}_{\underline{P}}} = id_{\underline{1}_{\underline{P}}}$$

c est bien un isomorphisme fonctoriel et vérifie $c_{B,A} \circ c_{A,B} = id$ pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$. Finalement pour la contrainte d'unité, posons

$$g_A = id_A : A \xrightarrow{\sim} \underline{1}_{\underline{P}} \otimes A = A \ , \ d_A = id_A : A \xrightarrow{\sim} A \otimes \underline{1}_{\underline{P}} = A$$

pour $A \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, et

$$g_{\underline{1}_{\underline{P}}} = d_{\underline{1}_{\underline{P}}} = id_{\underline{1}_{\underline{P}}} : \underline{1}_{\underline{P}} \xrightarrow{\sim} \underline{1}_{\underline{P}} \otimes \underline{1}_{\underline{P}} = \underline{1}_{\underline{P}}$$

$(\underline{1}_{\underline{P}}, g, d)$ est manifestement une contrainte d'unité pour $\underline{P}$. On vérifie aussitôt que ces contraintes sont compatibles. $\underline{P}$ est donc une $\otimes$-catégorie ACU.

Posons

$$D(A) = A \ , \ D(u) = u \ , \ \breve{D}_{A,B} = id_{A \otimes B}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, $u \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$. Il est immédiat que $(D, \breve{D})$ est un $\otimes$-foncteur de $\underline{A}$ dans $\underline{P}$ compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité.

Enfin, soient $\underline{Q}$ une $\otimes$-catégorie ACU, $(E, \breve{E}) : \underline{A} \to \underline{Q}$ un $\otimes$-foncteur compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité. Supposons qu'il existe un $\otimes$-foncteur $(E', \breve{E}') : \underline{P} \to \underline{Q}$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité dans $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ tel que $(E, \breve{E}) : (E', \breve{E}') \circ (D, \breve{D})$ et $\hat{E}' = id_{\underline{1}_{\underline{Q}}}$. On obtient aussitôt

$$(1) \quad \begin{aligned} &E'(A) = E(A)\ ,\ E'(\underline{1}_{\underline{P}}) = \underline{1}_{\underline{Q}}\ ,\ E'(u) = E(u),\ E'(id_{\underline{1}_{\underline{P}}}) = id_{\underline{1}_{\underline{Q}}} \\ &\breve{E}'_{A,B} = \breve{E}_{A,B}\ ,\ \breve{E}'_{\underline{1}_{\underline{P}}, A} = g^{-1}_{EA}\ ,\ \breve{E}'_{A, \underline{1}_{\underline{P}}} = d^{-1}_{EA}\ ,\ \breve{E}'_{\underline{1}_{\underline{P}}, \underline{1}_{\underline{P}}} = d^{-1}_{\underline{1}_{\underline{Q}}} = g^{-1}_{\underline{1}_{\underline{Q}}} \end{aligned}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$ et $u \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$. D'où l'unicité de $(E', \breve{E}')$.

Pour construire $(E', \breve{E}')$, définissons le par les formules (1).

On vérifie aisément que c'est un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$, tel que $(E, \check{E}) = (E', \check{E}') \circ (D, \check{D})$ et $\hat{E}' = id_{\underline{1}_{\underline{Q}}}$, ce qui démontre l'assertion.

Revenons au cas général ~~où $\underline{A}' \neq \emptyset$~~ ; les hypothèses sur $\underline{A}$, $\underline{A}'$, $(T, \check{T}) : \underline{A}' \to \underline{A}$ sont toujours comme au début du n°.

<u>Proposition 5</u>.- Soient $A, B \in Ob\,\underline{A}$, $\Phi(A,B)$ l'ensemble des triples $(A', B', u)$ où $A', B' \in Ob\,\underline{A}'$, $u \in Fl\,\underline{A}$, $u : A \otimes TA' \longrightarrow B \otimes TB'$. Soit $\mathcal{R}_{A,B}$ la relation binaire définie dans $\Phi(A,B)$ de la façon suivante :

$$(A'_1, B'_1, u_1)\ \mathcal{R}_{A,B}\ (A'_2, B'_2, u_2)$$

si et seulement s'il existe des isomorphismes

$$u' : A'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} A'_2 \otimes C'_2 \ , \quad v' : B'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} B'_2 \otimes C'_2$$

dans $\underline{A}'$ pour des objets $C'_1$, $C'_2$ de $\underline{A}'$, tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes T(A'_1 \otimes C'_1) \arrow[r, "id \otimes Tu'"] & A \otimes T(A'_2 \otimes C'_2) & \\
A \otimes (TA'_1 \otimes TC'_1) \arrow[ur, "id \otimes \check{T}"] \arrow[d, "a"] & & & A \otimes (TA'_2 \otimes TC'_2) \arrow[ul, "id \otimes \check{T}"'] \arrow[d, "a"] \\
(A \otimes TA'_1) \otimes TC'_1 \arrow[d, "u_1 \otimes id"] & & & (A \otimes TA'_2) \otimes TC'_2 \arrow[d, "u_2 \otimes id"] \\
(B \otimes TB'_1) \otimes TC'_1 & & & (B \otimes TB'_2) \otimes TC'_2 \\
B \otimes (TB'_1 \otimes TC'_1) \arrow[u, "a"] \arrow[dr, "id \otimes \check{T}"] & & & B \otimes (TB'_2 \otimes TC'_2) \arrow[u, "a"'] \arrow[dl, "id \otimes \check{T}"'] \\
 & B \otimes T(B'_1 \otimes C'_1) \arrow[r, "id \otimes Tv'"'] & B \otimes T(B'_2 \otimes C'_2) &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. $\mathcal{R}_{A,B}$ est une relation d'équivalence.

<u>Démonstration</u> - la relation $\mathcal{R}_{A,B}$ est manifestement réflexive et sy-

métrique. Montrons qu'elle est transitive. Soient $(A'_1, B'_1, u_1), (A'_2, B'_2, u_2)$ $(A'_3, B'_3, u_3) \in \bar{\Phi}(A,B)$ tels que $(A'_1, B'_1, u_1)\ \mathcal{R}_{A,B}\ (A'_2, B'_2, u_2)$ et $(A'_2, B'_2, u_2)\ \mathcal{R}_{A,B}\ (A'_3, B'_3, u_3)$, i.e il existe des isomorphismes

$$u' : A'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} A'_2 \otimes C'_2 \ , \quad v' : B'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} B'_2 \otimes C'_2$$

$$v'' : A'_2 \otimes C''_2 \xrightarrow{\sim} A'_3 \otimes C'_3 \ , \quad w' : B'_2 \otimes C''_2 \xrightarrow{\sim} B'_3 \otimes C'_3$$

pour des objets $C'_1, C'_2, C''_2, C'_3$ de $\underline{A}'$ tels qu'on ait la commutativité des diagrammes (2) et du diagramme (3) suivant

(3)
$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes T(A'_2 \otimes C''_2) \arrow[r, "id \otimes Tv''"] & A \otimes T(A'_3 \otimes C'_3) & \\
A \otimes (TA'_2 \otimes TC''_2) \arrow[ur, "id \otimes \check{T}"] \arrow[d, "a"] & & & A \otimes (TA'_3 \otimes TC'_3) \arrow[ul, "id \otimes \check{T}"'] \arrow[d, "a"] \\
(A \otimes TA'_2) \otimes TC''_2 \arrow[d, "u_2 \otimes id"] & & & (A \otimes TA'_3) \otimes TC'_3 \arrow[d, "u_3 \otimes id"] \\
(B \otimes TB'_2) \otimes TC''_2 & & & (B \otimes TB'_3) \otimes TC'_3 \\
B \otimes (TB'_2 \otimes TC''_2) \arrow[u, "a"] \arrow[dr, "id \otimes \check{T}"'] & & & B \otimes (TB'_3 \otimes TC'_3) \arrow[u, "a"'] \arrow[dl, "id \otimes \check{T}"] \\
 & B \otimes T(B'_2 \otimes C''_2) \arrow[r, "id \otimes w'"] & B \otimes T(B'_3 \otimes C'_3) &
\end{tikzcd}$$

Il faut faire attention quand on a parlé de la commutativité des diagrammes (2) et (3) : dans ces diagrammes toutes les flèches sont inversibles sauf $u_1 \otimes id_{TC'_1}$, $u_2 \otimes id_{TC'_2}$, $u_2 \otimes id_{TC''_2}$, $u_3 \otimes id_{TC'_3}$.

Venons maintenant à la démonstration. Pour cela, considérons les diagrammes (4) et (5) suivants

(4)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
A\otimes T((A'_1\otimes C'_1)\otimes C''_2) \arrow[ddddd, bend right=60, "id\otimes T(u'\otimes id)"'] & A\otimes T(A'_1\otimes(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[l, "id\otimes Ta'"'] & A\otimes(TA'_1\otimes T(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[l, "id\otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA'_1)\otimes T(C'_1\otimes C''_2) \arrow[r, "u_1\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & ( \\
A\otimes(T(A'_1\otimes C'_1)\otimes TC''_2) \arrow[u, "id\otimes\check{T}"] \arrow[d, "a"] & & \mathrm{(I)} & (A\otimes TA'_1)\otimes(TC'_1\otimes TC''_2) \arrow[u, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[d, "a"'] \arrow[r, "u_1\otimes(id\otimes id)"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & ( \\
(A\otimes T(A'_1\otimes C'_1))\otimes TC''_2 \arrow[d, "(id\otimes Tu')\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(X)}"] & & (A\otimes(TA'_1\otimes TC'_1))\otimes TC''_2 \arrow[ll, "(id\otimes\check{T})\otimes id"'] \arrow[r, "a\otimes id"] & ((A\otimes TA'_1)\otimes TC'_1)\otimes TC''_2 \arrow[r, "(u_1\otimes id)\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(V)}"] & (( \\
(A\otimes T(A'_2\otimes C'_2))\otimes TC''_2 & & (A\otimes(TA'_2\otimes TC'_2))\otimes TC''_2 \arrow[ll, "(id\otimes\check{T})\otimes id"'] \arrow[r, "a\otimes id"] & ((A\otimes TA'_2)\otimes TC'_2)\otimes TC''_2 \arrow[r, "(u_2\otimes id)\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(VII)}"] & (( \\
A\otimes(T(A'_2\otimes C'_2)\otimes TC''_2) \arrow[u, "a"] \arrow[d, "id\otimes\check{T}"] & & \mathrm{(VI)} & (A\otimes TA'_2)\otimes(TC'_2\otimes TC''_2) \arrow[u, "a"'] \arrow[d, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "u_2\otimes(id\otimes id)"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(VIII)}"] & ( \\
A\otimes T((A'_2\otimes C'_2)\otimes C''_2) & A\otimes T(A'_2\otimes(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[l, "id\otimes Ta'"'] & A\otimes(TA'_2\otimes T(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[l, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA'_2)\otimes T(C'_2\otimes C''_2) \arrow[r, "u_2\otimes id"] & (B
\end{tikzcd}$$

(5)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & A\otimes T(A'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[d, "id\otimes T(id\otimes c')"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(XII)}"] & A\otimes(TA'_1\otimes T(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[l, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA'_1)\otimes T(C''_2\otimes C'_1) \arrow[d, "id\otimes Tc"'] \arrow[r, "u_1\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(XI)}"] & (B \\
A\otimes T((A'_1\otimes C'_1)\otimes C''_2) \arrow[d, "id\otimes T(u'\otimes id)"] & A\otimes T(A'_1\otimes(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[l, "id\otimes Ta'"'] & A\otimes(TA'_1\otimes T(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[l, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA'_1)\otimes T(C'_1\otimes C''_2) \arrow[r, "u_1\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(XV)}"] & (B \\
A\otimes T((A'_2\otimes C'_2)\otimes C''_2) & A\otimes T(A'_2\otimes(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[l, "id\otimes Ta'"'] \arrow[d, "id\otimes T(id\otimes c')"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(XVI)}"] & A\otimes(TA'_2\otimes T(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[l, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA'_2)\otimes T(C'_2\otimes C''_2) \arrow[d, "id\otimes Tc'"'] \arrow[r, "u_2\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(XVII)}"] & (B \\
 & A\otimes T(A'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)) & A\otimes(TA'_2\otimes T(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[l, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA'_2)\otimes T(C''_2\otimes C'_2) \arrow[r, "u_2\otimes id"] & (B
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
{\otimes C''_2)} \arrow[r, "u_1 \otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & (B\otimes TB'_1)\otimes T(C'_1\otimes C''_2) & B\otimes(TB'_1\otimes T(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes \check{T}"] & B\otimes T(B'_1\otimes(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[r, "id\otimes Ta'"] & B\otimes T((B'_1\otimes C'_1)\otimes C''_2) \arrow[ddddd, bend left, "id\otimes T(v'\otimes id)"] \\
{\otimes TC''_2)} \arrow[r, "u_1\otimes(id\otimes id)"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{VI})"] & (B\otimes TB'_1)\otimes(TC'_1\otimes TC''_2) \arrow[u, "id\otimes\check{T}"] \arrow[d, "a"] & & (\mathrm{IV}) & B\otimes(T(B'_1\otimes C'_1)\otimes TC''_2) \arrow[u, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[d, "a"'] \\
{)\otimes TC''_2} \arrow[r, "(u_1\otimes id)\otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{V})"] & ((B\otimes TB'_1)\otimes TC'_1)\otimes TC''_2 & (B\otimes(TB'_1\otimes TC'_1))\otimes TC''_2 \arrow[l, "a\otimes id"'] \arrow[rr, "(id\otimes\check{T})\otimes id"] & & (B\otimes T(B'_1\otimes C'_1))\otimes TC''_2 \arrow[d, "(id\otimes Tv)\otimes id"'] \arrow[d, phantom, shift left=8, "(\mathrm{XI})"] \\
{)\otimes TC''_2} \arrow[r, "(u_2\otimes id)\otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{VII})"] & ((B\otimes TB'_2)\otimes TC'_2)\otimes TC''_2 & (B\otimes(TB'_2\otimes TC'_2))\otimes TC''_2 \arrow[l, "a\otimes id"'] \arrow[rr, "(id\otimes\check{T})\otimes id"] & & (B\otimes T(B'_2\otimes C'_2))\otimes TC''_2 \\
{\otimes TC''_2)} \arrow[r, "u_2\otimes(id\otimes id)"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & (B\otimes TB'_2)\otimes(TC'_2\otimes TC''_2) \arrow[u, "a"] \arrow[d, "id\otimes\check{T}"] & & (\mathrm{IX}) & B\otimes(T(B'_2\otimes C'_2)\otimes TC''_2) \arrow[u, "a"'] \arrow[d, "id\otimes\check{T}"'] \\
{\otimes C''_2)} \arrow[r, "u_2\otimes id"] & (B\otimes TB'_2)\otimes T(C'_2\otimes C''_2) & B\otimes(TB'_2\otimes T(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] & B\otimes T(B'_2\otimes(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[r, "id\otimes Ta'"] & B\otimes T((B'_2\otimes C'_2)\otimes C''_2) \\
{\otimes C'_1)} \arrow[r, "u_1\otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XII})"] & (B\otimes TB'_1)\otimes T(C''_2\otimes C'_1) \arrow[d, "id\otimes Tc'"] & B\otimes(TB'_1\otimes T(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XIV})"] & B\otimes T(B'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[d, "id\otimes T(id\otimes c')"'] & \\
{\otimes C''_2)} \arrow[r, "u_1\otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XV})"] & (B\otimes TB'_1)\otimes T(C'_1\otimes C''_2) & B\otimes(TB'_1\otimes T(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] & B\otimes T(B'_1\otimes(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[r, "id\otimes Ta'"] & B\otimes T((B'_1\otimes C'_1)\otimes C''_2) \arrow[d, "id\otimes T(v'\otimes id)"'] \\
{\otimes C''_2)} \arrow[r, "u_2\otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XVII})"] & (B\otimes TB'_2)\otimes T(C'_2\otimes C''_2) \arrow[d, "id\otimes Tc'"] & B\otimes(TB'_2\otimes T(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] \arrow[d, phantom, "\boxed{\mathrm{XVIII}}"] & B\otimes T(B'_2\otimes(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[r, "id\otimes Ta'"] \arrow[d, "id\otimes T(id\otimes c')"'] & B\otimes T((B'_2\otimes C'_2)\otimes C''_2) \\
{\otimes C'_2)} \arrow[r, "u_2\otimes id"] & (B\otimes TB'_2)\otimes T(C''_2\otimes C'_2) & B\otimes(TB'_2\otimes T(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] & B\otimes T(B'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)) &
\end{tikzcd}
$$

dans lesquels la commutativité des régions (I), (IV), (VI), (IX), (XII), (XIV), (XVI), (XVIII) résulte de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12) ; celle de (II), (VIII) de la fonctorialité de $\check{T}$ ; celle de (III), (VII) de la fonctorialité de a ; celle de (V) est donnée par l'hypothèse ; celle de (X), (XI) vient de la fonctorialité de a et $\check{T}$ ; enfin celle de (XIII) et (XVII) découle de la fonctorialité de c'. On en conclut la commutativité du circuit extérieur du diagramme (4), et par suite celle du circuit extérieur de (5) en remarquant que la région (XV) de (5) n'est ~~pas~~ autre que le circuit extérieur de (4). Ces considérations nous permet d'affirmer qu'il existe des isomorphismes

$$A'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1) \xrightarrow[\sim]{u'_1} A'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)\ ,\quad B'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1) \xrightarrow[\sim]{v'_1} B'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)$$

$$A'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2) \xrightarrow[\sim]{v''_1} A'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2)\ ,\quad B'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2) \xrightarrow[\sim]{W'_1} B'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2)$$

définis par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccccc}
A'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1) & \xrightarrow{id\otimes c'} & A'_1\otimes(C'_1\otimes C''_2) & \xrightarrow{a'} & (A'_1\otimes C'_1)\otimes C''_2 \\
{\scriptstyle u'_1}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle u'\otimes id} \\
A'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2) & \xrightarrow{id\otimes c'} & A'_2\otimes(C'_2\otimes C''_2) & \xrightarrow{a'} & (A'_2\otimes C'_2)\otimes C''_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
B'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1) & \xrightarrow{id\otimes c'} & B'_1\otimes(C'_1\otimes C''_2) & \xrightarrow{a'} & (B'_1\otimes C'_1)\otimes C''_2 \\
{\scriptstyle v'_1}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle v'\otimes id} \\
B'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2) & \xrightarrow{id\otimes c'} & B'_2\otimes(C'_2\otimes C''_2) & \xrightarrow{a'} & (B'_2\otimes C'_2)\otimes C''_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
A'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2) & \xrightarrow{a'} & (A'_2\otimes C''_2)\otimes C'_2 \\
{\scriptstyle v''_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v''\otimes id} \\
A'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2) & \xrightarrow{a'} & (A'_3\otimes C'_3)\otimes C'_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
B'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2) & \xrightarrow{a'} & (B'_2\otimes C''_2)\otimes C'_2 \\
{\scriptstyle W'_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle W'\otimes id} \\
B'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2) & \xrightarrow{a'} & (B'_3\otimes C'_3)\otimes C'_2
\end{array}$$

tels que les diagrammes suivants soient commutatifs

$$\begin{tikzcd}
A\otimes(TA'_1\otimes T(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id\otimes\check{T}"] & (A\otimes TA'_1)\otimes T(C''_2\otimes C'_1) \arrow[r, "u_1\otimes id"] & (B\otimes TB'_1)\otimes T(C''_2\otimes C'_1) & B\otimes(TB'_1\otimes T(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "id\otimes\check{T}"] \\
A\otimes T(A'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[d, "id\otimes Tv'_1"] & & (6) & B\otimes T(B'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[d, "id\otimes Tv'_1"] \\
A\otimes T(A'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)) & & & B\otimes T(B'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)) \\
A\otimes(TA'_2\otimes T(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[r, "a"] \arrow[u, "id\otimes\check{T}"] & (A\otimes TA'_2)\otimes T(C''_2\otimes C'_2) \arrow[r, "u_2\otimes id"] & (B\otimes TB'_2)\otimes T(C''_2\otimes C'_2) & B\otimes(TB'_2\otimes T(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[u, "id\otimes\check{T}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A\otimes(TA'_2\otimes T(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id\otimes\check{T}"] & (A\otimes TA'_2)\otimes T(C''_2\otimes C'_2) \arrow[r, "u_2\otimes id"] & (B\otimes TB'_2)\otimes T(C''_2\otimes C'_2) & B\otimes(TB'_2\otimes T(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "id\otimes\check{T}"] \\
A\otimes T(A'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[d, "id\otimes Tv''_1"] & & (7) & B\otimes T(B'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[d, "id\otimes Tw'_1"] \\
A\otimes T(A'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2)) & & & B\otimes T(B'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2)) \\
A\otimes(TA'_3\otimes T(C'_3\otimes C'_2)) \arrow[r, "a"] \arrow[u, "id\otimes\check{T}"] & (A\otimes TA'_3)\otimes T(C'_3\otimes C'_2) \arrow[r, "u_3\otimes id"] & (B\otimes TB'_3)\otimes T(C'_3\otimes C'_2) & B\otimes(TB'_3\otimes T(C'_3\otimes C'_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[u, "id\otimes\check{T}"]
\end{tikzcd}$$

ce qui permet de conclure la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
A\otimes(TA'_1\otimes T(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id\otimes\check{T}"] & (A\otimes TA'_1)\otimes T(C''_2\otimes C'_1) \arrow[r, "u_1\otimes id"] & (B\otimes TB'_1)\otimes T(C''_2\otimes C'_1) & B\otimes(TB'_1\otimes T(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "id\otimes\check{T}"] \\
A\otimes T(A'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[d, "id\otimes T(v''_1u'_1)"] & & & B\otimes T(B'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[d, "id\otimes T(w'_1v'_1)"] \\
A\otimes T(A'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2)) & & & B\otimes T(B'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2)) \\
A\otimes(TA'_3\otimes T(C'_3\otimes C'_2)) \arrow[r, "a"] \arrow[u, "id\otimes\check{T}"] & (A\otimes TA'_3)\otimes T(C'_3\otimes C'_2) \arrow[r, "u_3\otimes id"] & (B\otimes TB'_3)\otimes T(C'_3\otimes C'_2) & B\otimes(TB'_3\otimes T(C'_3\otimes C'_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[u, "id\otimes\check{T}"]
\end{tikzcd}$$

D'où $(A'_1, B'_1, u_1)\ \mathcal{R}_{A,B}\ (A'_3, B'_3, u_3)$. Nous désignons par $[A', B', u]$ la classe d'équivalence de $(A', B', u)$.

<u>Remarques</u>. — 1) Soient $[A'_1, B'_1, u_1]$, $[A'_2, B'_2, u_2] \in \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}$, $u' : A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$, $v' : B_1 \xrightarrow{\sim} B_2$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \otimes TA'_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "id \otimes Tu'"'] & B \otimes TB'_1 \arrow[d, "id \otimes Tv'"] \\
A \otimes TA'_2 \arrow[r, "u_2"] & B \otimes TB'_2
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Alors $[A'_1, B'_1, u_1] = [A'_2, B'_2, u_2]$. En effet, prenons un objet quelconque $C'_1$ de $\underline{A}'$, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A'_1 \otimes C'_1) \arrow[d, "id \otimes T(u' \otimes id)"'] & A \otimes (TA'_1 \otimes TC'_1) \arrow[l, "id \otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id \otimes (Tu' \otimes id)"] & (A \otimes TA'_1) \otimes TC'_1 \arrow[r, "u_1 \otimes id"] \arrow[d, "(id \otimes Tu') \otimes id"] & (B \otimes TB'_1) \otimes TC'_1 \arrow[d, "(id \otimes Tv') \otimes id"] & B \otimes (TB'_1 \otimes TC'_1) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id \otimes \check{T}"] \arrow[d, "id \otimes (Tv' \otimes id)"] & B \otimes T(B'_1 \otimes C'_1) \arrow[d, "id \otimes T(v' \otimes id)"] \\
A \otimes T(A'_2 \otimes C'_1) & A \otimes (TA'_2 \otimes TC'_1) \arrow[l, "id \otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A \otimes TA'_2) \otimes TC'_1 \arrow[r, "u_2 \otimes id"] & (B \otimes TB'_2) \otimes TC'_1 & B \otimes (TB'_2 \otimes TC'_1) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id \otimes \check{T}"] & B \otimes T(B'_2 \otimes C'_1)
\end{tikzcd}$$

ayant ses régions commutatives, ce qu'on peut vérifier aussitôt, nous donne la commutativité de son circuit extérieur.

2) Soient $[A', B', u] \in \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}$ ; $u'' : B'' \xrightarrow{\sim} B'' \in Fl\,\underline{A}'$. Alors $[A', B', u] = [A' \otimes B'', B' \otimes B'', \tilde{u}]$, $\tilde{u}$ étant défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A' \otimes B'') \arrow[d, "\tilde{u}"'] & A \otimes (TA' \otimes TB'') \arrow[l, "id \otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A \otimes TA') \otimes TB'' \arrow[d, "u \otimes Tu'"] \\
B \otimes T(B' \otimes B'') & B \otimes (TB' \otimes TB'') \arrow[l, "id \otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (B \otimes TB') \otimes TB''
\end{tikzcd}$$

En effet considérons le diagramme ci-dessous où $C'$ est un objet quelconque de $\underline{A}'$. Dans ce diagramme, la commutativité des régions (I), (VI), (IX) résulte de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12) ; celle de (II), (X) de la fonctorialité de $\check{T}$ ; celle de (III), (VII), (VIII) de la fonctorialité de $a$ ; celle de (IV) est évidente ; celle de (V) est donnée par le diagramme commutatif définissant $\tilde{u}$ ; enfin celle de (XI) résulte de la définition de $v' = ((id \otimes u') \otimes id)\, a'$. D'où la commutativité du circuit extérieur qui donne l'égalité $[A', B', u] =$
$= [A' \otimes B'', B' \otimes B'', \tilde{u}]$.

Add 1

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
A\otimes T(A'\otimes(B''\otimes C')) \arrow[ddddd, "id\otimes Ta'"'] & A\otimes(TA'\otimes T(B''\otimes C')) \arrow[l, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA')\otimes T(B''\otimes C') \arrow[r, "u\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & (B\otimes TB')\otimes T(B''\otimes C') & B\otimes(TB'\otimes T(B''\otimes C')) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] & B\otimes T(B\otimes( \\
& & (A\otimes TA')\otimes(TB''\otimes TC') \arrow[u, "id\otimes\check{T}"] \arrow[r, "u\otimes id"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & (B\otimes TB')\otimes(TB''\otimes TC') \arrow[u, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[d, "a"] & \mathrm{VI} & B\otimes T((B\otimes \\
& \mathrm{I} & ((A\otimes TA')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[r, "(u\otimes id)\otimes id"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IV}"] & ((B\otimes TB')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[d, "(id\otimes Tu')\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VII}"] & (B\otimes(TB'\otimes TB''))\otimes TC' \arrow[l, "a\otimes id"'] \arrow[d, "(id\otimes(id\otimes Tu'))\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VIII}"] & B\otimes((TB'\otimes \arrow[l, "a"'] \\
& & ((A\otimes TA')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[r, "(u\otimes Tu')\otimes id"] & ((B\otimes TB')\otimes TB'')\otimes TC' & (B\otimes(TB'\otimes TB''))\otimes TC' \arrow[l, "a\otimes id"'] & B\otimes((TB'\otimes \arrow[l, "a"'] \\
& & (A\otimes(TA'\otimes TB''))\otimes TC' \arrow[u, "a\otimes id"] \arrow[d, "(id\otimes\check{T})\otimes id"'] \arrow[r, phantom, "\mathrm{V}"] & (B\otimes(TB'\otimes TB''))\otimes TC' \arrow[u, "a\otimes id"'] \arrow[d, "(id\otimes\check{T})\otimes id"] & \mathrm{IX} & B\otimes(T(B\otimes \\
A\otimes T((A'\otimes B'')\otimes C') & A\otimes(T(A'\otimes B'')\otimes TC') \arrow[l, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes T(A'\otimes B''))\otimes TC' \arrow[r, "\tilde{u}\otimes id"] & (B\otimes T(B'\otimes B''))\otimes TC' & B\otimes(T(B'\otimes B'')\otimes TC') \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] & B\otimes T((B\otimes
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "id \otimes \check{T}"] & B \otimes T(B' \otimes (B'' \otimes C')) \arrow[d, "id \otimes Ta'"] \\
& B \otimes T((B' \otimes B'') \otimes C') \\
& B \otimes (T(B' \otimes B'') \otimes TC') \arrow[u, "id \otimes \check{T}"] \\
\otimes TC' \arrow[d, "d \otimes T(a')) \otimes id"'] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & B \otimes ((TB' \otimes TB'') \otimes TC') \arrow[l, "a"'] \arrow[u, "id \otimes (\check{T} \otimes id)"] \arrow[d, "id \otimes ((id \otimes Ta') \otimes id)"] \\
) \otimes TC' & B \otimes ((TB' \otimes TB'') \otimes TC') \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "id \otimes (\check{T} \otimes id)"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{X})"] & {} \\
& B \otimes (T(B' \otimes B'') \otimes TC') \arrow[d, "id \otimes \check{T}"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{XI})"] & {} \\
TC') \arrow[r, "id \otimes \check{T}"] & B \otimes T((B' \otimes B'') \otimes C')
\end{tikzcd}$$

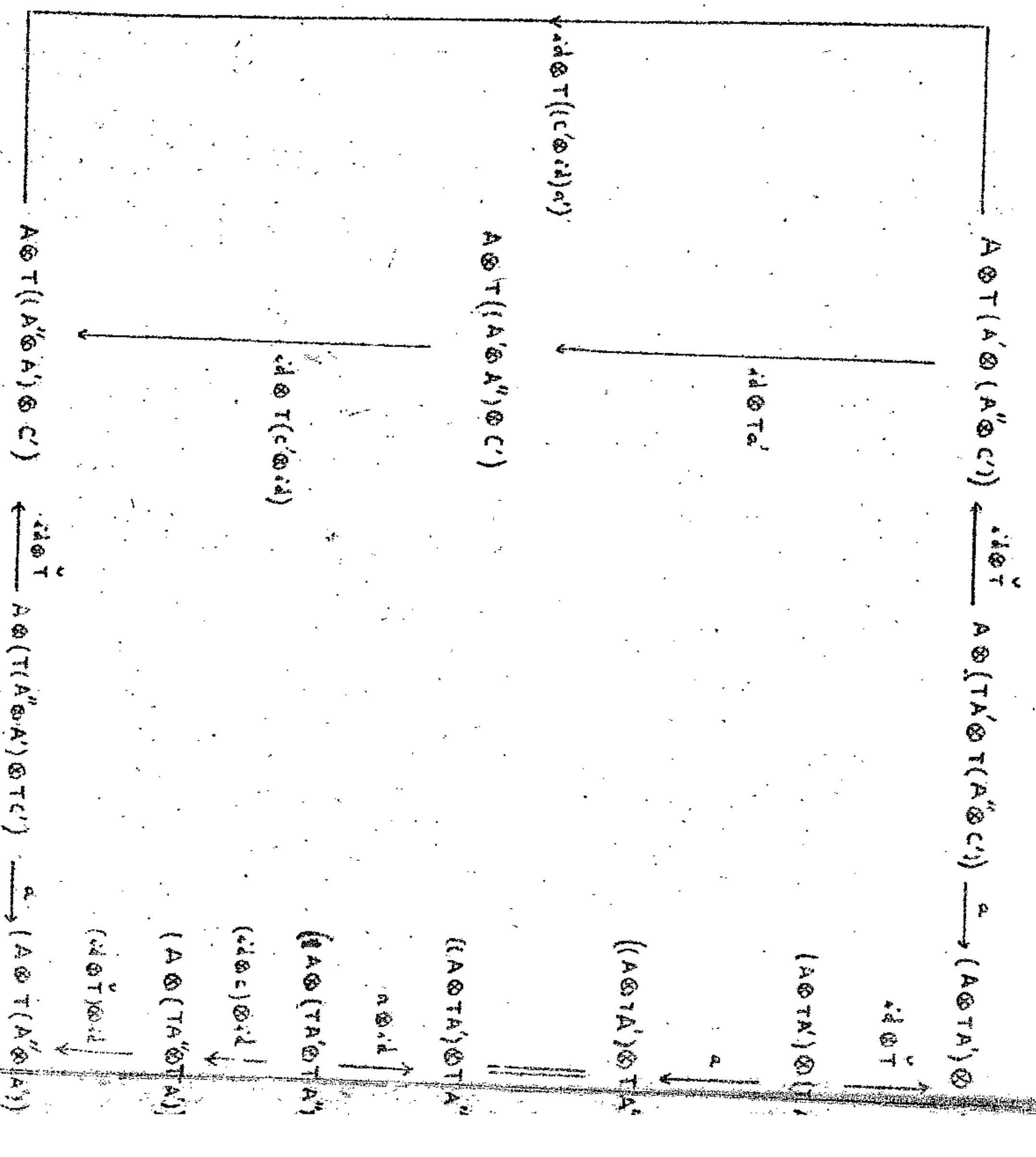
Right-hand arrows: $id \otimes T((id \otimes a') \otimes id)$ (from $B \otimes T((B' \otimes B'') \otimes C')$), $id \otimes Ta'$ (from $B \otimes T(B' \otimes (B'' \otimes C'))$).

3) Soient $[A', B', u] \in \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}$ , $v' : A'' \xrightarrow{\sim} A'' \in Fl(\underline{A}')$.

Alors $[A', B', u] = [A''\otimes A', A''\otimes B', \overset{2}{u}]$ , $\overset{2}{u}$ étant défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A\otimes T(A''\otimes A') \arrow[d, "\overset{2}{u}"'] & A\otimes(TA''\otimes TA') \arrow[l, "id\otimes \check{T}"'] \arrow[r, "id\otimes c"] & A\otimes(TA'\otimes TA'') \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA')\otimes TA'' \arrow[d, "u\otimes Tv'"] \\
B\otimes T(A''\otimes B') & B\otimes(TA''\otimes TB') \arrow[l, "id\otimes \check{T}"'] \arrow[r, "id\otimes c"] & B\otimes(TB'\otimes TA'') \arrow[r, "a"] & (B\otimes TB')\otimes TA''
\end{tikzcd}$$

En effet il suffit de considérer le diagramme suivant dont toutes les régions sont commutatives, ce qui implique le circuit extérieur commutatif et par suite l'égalité $[A', B', u] = [A''\otimes A', A''\otimes B', \overset{2}{u}]$. Dans ce diagramme $C'$ est un objet quelconque de $\underline{A}'$ et $w' = (c'\otimes id)((id\otimes v')\otimes id)a'$.



$$
\begin{tikzcd}
\otimes TA')\otimes T(A''\otimes C') \arrow[r, "u\otimes id"] & (B\otimes TB')\otimes \check{T}(A''\otimes C') & B\otimes(TB'\otimes T(A''\otimes C')) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] & B\otimes T(B'\otimes(A''\otimes C')) \arrow[d, "id\otimes Ta'"] \arrow[ddddddd, bend left=60, "id\otimes Tw'"] \\
 & & & B\otimes T((B'\otimes A'')\otimes C') \arrow[dddddd, bend left=40, "id\otimes T((id\otimes v')\otimes id)"] \\
\otimes TA')\otimes(TA''\otimes TC') \arrow[uu, "id\otimes\check{T}"] \arrow[r, "u\otimes id"] \arrow[d, "a"] & (B\otimes TB')\otimes(TA''\otimes TC') \arrow[uu, "id\otimes\check{T}"] \arrow[d, "a"] & & B\otimes(T(B'\otimes A'')\otimes TC') \arrow[u, "id\otimes\check{T}"] \\
\otimes TA')\otimes TA'')\otimes TC' \arrow[r, "(u\otimes id)\otimes id"] \arrow[d, equal] & ((B\otimes TB')\otimes TA'')\otimes TC' \arrow[d, "(id\otimes Tv')\otimes id"] & (B\otimes(TB'\otimes TA''))\otimes TC' \arrow[l, "a\otimes id"'] \arrow[d, "(id\otimes(id\otimes Tv'))\otimes id"] & B\otimes((TB'\otimes TA'')\otimes TC') \arrow[l, "a"'] \arrow[u, "id\otimes(\check{T}\otimes id)"] \arrow[d, "id\otimes((id\otimes Tv')\otimes id)"] \\
\otimes TA')\otimes TA'')\otimes TC' \arrow[r, "(u\otimes Tv')\otimes id"] & ((B\otimes TB')\otimes TA'')\otimes TC' & (B\otimes(TB'\otimes TA''))\otimes TC' \arrow[l, "a\otimes id"'] & B\otimes((TB'\otimes TA'')\otimes TC') \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "id\otimes(\check{T}\otimes id)"] \\
\otimes(TA'\otimes TA''))\otimes TC' \arrow[u, "a\otimes id"] \arrow[d, "c)\otimes id"] & (B\otimes(TB'\otimes TA''))\otimes TC' \arrow[u, "a\otimes id"] \arrow[d, "(id\otimes c)\otimes id"] & & B\otimes(T(B'\otimes A'')\otimes TC') \arrow[d, "id\otimes\check{T}"] \\
\otimes(TA''\otimes TA'))\otimes TC' \arrow[d, "\check{T})\otimes id"] & (B\otimes(TA''\otimes TB'))\otimes TC' \arrow[d, "(id\otimes\check{T})\otimes id"] & & B\otimes T((B'\otimes A'')\otimes C') \arrow[d, "id\otimes T(c'\otimes id)"] \\
\otimes T(A''\otimes A'))\otimes TC' \arrow[r, "\overset{2}{u}\otimes id"] & (B\otimes T(A''\otimes B'))\otimes TC' & B\otimes(T(A''\otimes B')\otimes TC') \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "id\otimes\check{T}"] & B\otimes T((A''\otimes B')\otimes C')
\end{tikzcd}
$$

<u>Proposition 6</u>.— Soient $A, B, C \in Ob\,\underline{A}$, $[A', B', u] \in \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}$, $[B'', C'', v] \in \Phi(B,C)/\mathcal{R}_{B,C}$. Alors la classe d'équivalence

$$[A'\otimes B'', B'\otimes C'', \omega] \in \Phi(A,C)/\mathcal{R}_{A,C}$$

avec $\omega$ défini par le diagramme commutatif

(8)
$$\begin{tikzcd}
A\otimes T(A'\otimes B'') \arrow[dddd, "\omega"] & A\otimes(TA'\otimes TB'') \arrow[l, "id\otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA')\otimes TB'' \arrow[r, "u\otimes id"] & (B\otimes TB')\otimes TB'' \\
 & & & B\otimes(TB'\otimes TB'') \arrow[u, "a"'] \arrow[d, "id\otimes c"'] \\
 & & & B\otimes(TB''\otimes TB') \arrow[d, "a"'] \\
 & & & (B\otimes TB'')\otimes TB' \arrow[d, "v\otimes id"'] \\
C\otimes T(B'\otimes C'') & C\otimes(TB'\otimes TC'') \arrow[l, "id\otimes \check{T}"'] \arrow[r, "id\otimes c"] & C\otimes(TC''\otimes TB') \arrow[r, "a"] & (C\otimes TC'')\otimes TB'
\end{tikzcd}$$

est indépendante des représentants des classes $[A', B', u]$, $[B'', C'', v]$.

<u>Démonstration</u>.— Soient $[A', B', u] = [A'_1, B'_1, u_1]$, $[B'', C'', v] = [B''_1, C''_1, v_1]$. Montrons d'abord que

$$[A'\otimes B'', B'\otimes C'', \omega] = [A'_1\otimes B'', B'_1\otimes C'', \Omega]$$

$\Omega$ étant défini de la même façon que $\omega$. L'égalité $[A', B', u] = [A'_1, B'_1, u_1]$ s'exprime par l'existence des isomorphismes $u' : A'\otimes C' \xrightarrow{\sim} A'_1\otimes C'_1$, $v' : B'\otimes C' \xrightarrow{\sim} B'_1\otimes C'_1$ tels qu'on ait la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
A\otimes T(A'\otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes Tu'"'] & (A\otimes TA')\otimes TC' \arrow[r, "u\otimes id"] & (B\otimes TB')\otimes TC' \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B'\otimes C') \arrow[d, "id\otimes Tv'"] \\
A\otimes T(A'_1\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] & (A\otimes TA'_1)\otimes TC'_1 \arrow[r, "u_1\otimes id"] & (B\otimes TB'_1)\otimes TC'_1 \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B'_1\otimes C'_1)
\end{tikzcd}$$

où les flèches en pointillé sont des composés des flèches construites à l'aide de $a, a^{-1}, \check{T}, \check{T}^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$ (voir Diag (21)). Désormais pour un $\otimes$-foncteur AC (resp. ACU) $(F, \check{F})$ d'une $\otimes$-catégorie AC (resp.

ACU) $\underline{C}$ dans une ⊗-catégorie AC (respectivement ACU) $\underline{C}'$, en vertu de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12 (resp. Prop. 11)) nous marquerons souvent, pour abréger, en pointillé, les flèches construites à l'aide de $a'$, $a'^{-1}$, $c'$, $c'^{-1}$, $Fa$, $Fa^{-1}$, $Fc$, $Fc^{-1}$, $\check{F}$, $\check{F}^{-1}$, des identités et de la loi ⊗ (resp. $a'$, $a'^{-1}$, $c'$, $c'^{-1}$, $g'$, $g'^{-1}$, $d'$, $d'^{-1}$, $Fa$, $Fa^{-1}$, $Fc$, $Fc^{-1}$, $Fg$, $Fg^{-1}$, $Fd$, $Fd^{-1}$, $\hat{F}$, $\hat{F}^{-1}$, $\check{F}$, $\check{F}^{-1}$, des identités et de la loi ⊗), et les composés de ces flèches. Soient $u'_1, u'_2, v'_1, v'_2$ les flèches de $\underline{A}'$ définies par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
A'\otimes(B''\otimes C') \arrow[r, "id\otimes c'"] \arrow[d, "u'_1"'] & A'\otimes(C'\otimes B'') \arrow[r, "a'"] & (A'\otimes C')\otimes B'' \arrow[d, "u'\otimes id"] \\
A'_1\otimes(B''\otimes C'_1) \arrow[r, "id\otimes c'"] & A'_1\otimes(C'_1\otimes B'') \arrow[r, "a'"] & (A'_1\otimes C'_1)\otimes B''
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A'\otimes B'')\otimes C' \arrow[d, "u'_2"'] & A'\otimes(B''\otimes C') \arrow[l, "a'"'] \arrow[d, "u'_1"] \\
(A'_1\otimes B'')\otimes C'_1 & A'_1\otimes(B''\otimes C'_1) \arrow[l, "a'"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B'\otimes(B''\otimes C') \arrow[r, "id\otimes c'"] \arrow[d, "v'_1"'] & B'\otimes(C'\otimes B'') \arrow[r, "a'"] & (B'\otimes C')\otimes B'' \arrow[d, "v'\otimes id"] \\
B'_1\otimes(B''\otimes C'_1) \arrow[r, "id\otimes c'"] & B'_1\otimes(C'_1\otimes B'') \arrow[r, "a'"] & (B'_1\otimes C'_1)\otimes B''
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(B'\otimes C'')\otimes C' \arrow[d, "v'_2"'] & B'\otimes(C''\otimes C') \arrow[l, "a'"'] \arrow[r, "id\otimes c'"] & B'\otimes(C'\otimes C'') \arrow[d, "a'"] \\
(B'_1\otimes C'')\otimes C'_1 & & (B'\otimes C')\otimes C'' \arrow[d, "v'\otimes id"] \\
B'_1\otimes(C''\otimes C'_1) \arrow[u, "a'"] \arrow[r, "id\otimes c'"] & B'_1\otimes(C'_1\otimes C'') \arrow[r, "a'"] & (B'_1\otimes C'_1)\otimes C''
\end{tikzcd}$$

Ensuite considérons le diagramme suivant dont la commutativité des régions (I), ($\overline{\underline{XX}}$) résulte de la définition de $\omega$ et $\Omega$ (voir Diag. (B)); celle de (II), ($\overline{\underline{IV}}$), ($\overline{\underline{VI}}$), ($\overline{\underline{XV}}$), ($\overline{\underline{XVIII}}$), ($\overline{\underline{XIX}}$) résulte de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12),

$$
\begin{tikzcd}
(A\otimes T(A'\otimes B''))\otimes TC' \arrow[rr, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\mathrm{II}"] \arrow[rrrrrr, bend left, "\omega\otimes id"] & & ((A\otimes TA')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[r, "(u\otimes id)\otimes id"] \arrow[d, dashed] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\mathrm{III}"] & ((B\otimes TB')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[d, dashed] \arrow[rrr, dashed] \arrow[rrr, phantom, shift right=6, "\mathrm{IV}"] \arrow[rrr, phantom, shift left=6, "\mathrm{I}"] & & & {} \\
A\otimes T((A'\otimes B'')\otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes Tu'_2"'] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\mathrm{VII}"] & A\otimes T(A'\otimes(B''\otimes C')) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes Tu'_1"] & (A\otimes TA')\otimes T(B''\otimes C') \arrow[r, "u\otimes id"] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\mathrm{VIII}"] & (B\otimes TB')\otimes T(B''\otimes C') \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B'\otimes(B''\otimes C')) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes Tu'_1"'] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\mathrm{IX}"] & B\otimes T((B'\otimes C') \arrow[d, "id\otimes"] & \\
A\otimes T((A'_1\otimes B'')\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\mathrm{XI}"] & A\otimes T(A'_1\otimes(B''\otimes C'_1)) \arrow[r, dashed] & (A\otimes TA'_1)\otimes T(B''\otimes C'_1) \arrow[r, "u_1\otimes id"] \arrow[d, dashed] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\mathrm{XIV}"] & (B\otimes TB')\otimes T(B\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & B\otimes T(B'_1\otimes(B''\otimes C'_1)) \arrow[r, dashed] & B\otimes T((B'_1\otimes C'_1 \arrow[r, phantom, shift right=6, "\mathrm{XVII}"] & {} \\
(A\otimes T(A'_1\otimes B''))\otimes TC'_1 \arrow[rr, dashed] \arrow[rrrrrr, bend right, "\Omega\otimes id"'] & & ((A\otimes TA'_1)\otimes TB'')\otimes TC'_1 \arrow[r, "(u_1\otimes id)\otimes id"] & ((B\otimes TB'_1)\otimes TB'')\otimes TC'_1 \arrow[rrr, dashed] \arrow[rrr, phantom, shift right=6, "\mathrm{XX}"] & & & {}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
{} \arrow[rrrrrr, bend left, "\omega\otimes id"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{(I)}"] & & & ((B\otimes TB'')\otimes TB')\otimes TC' \arrow[r, "(v\otimes id)\otimes id"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(V)}"] & ((C\otimes TC'')\otimes TB')\otimes TC' \arrow[rr, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[drr, phantom, "\mathrm{(VI)}"] & & (C\otimes T(B'\otimes C''))\otimes TC' \arrow[d, dashed] \\
{} \arrow[r, dashed] \arrow[u, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & B\otimes T((B'\otimes C')\otimes B'') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes T(v\otimes id)"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(X)}"] & B\otimes T(B''\otimes(B'\otimes C')) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes T(id\otimes w')"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(XI)}"] & (B\otimes TB'')\otimes T(B'\otimes C') \arrow[r, "v\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes Tw'"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(XII)}"] & (C\otimes TC'')\otimes T(B'\otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes Tw'"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(XIII)}"] & C\otimes T(C''\otimes(B'\otimes C')) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes T(id\otimes w')"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(XIV)}"] & C\otimes T((B'\otimes C'')\otimes C') \arrow[d, "id\otimes Tw'_2"] \\
{} \arrow[r, dashed] \arrow[d, phantom, "\mathrm{(XVII)}"] & B\otimes T((B'_1\otimes C'_1)\otimes B'') \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B''\otimes(B'_1\otimes C'_1)) \arrow[r, dashed] & (B\otimes TB'')\otimes T(B'_1\otimes C'_1) \arrow[r, "v\otimes id"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(XVIII)}"] & (C\otimes TC'')\otimes T(B'_1\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[drr, phantom, "\mathrm{(XIX)}"] & C\otimes T(C''\otimes(B'_1\otimes C'_1)) \arrow[r, dashed] & C\otimes T((B'_1\otimes C'')\otimes C'_1) \arrow[d, dashed] \\
{} \arrow[rrr, dashed] \arrow[rrrrrr, bend right, "\Omega\otimes id"'] \arrow[u, phantom, "\mathrm{(XX)}"] & & & ((B\otimes TB'')\otimes TB'_1)\otimes TC'_1 \arrow[r, "(v\otimes id)\otimes id"] & ((C\otimes TC'')\otimes TB'_1)\otimes TC'_1 \arrow[rr, dashed] & & (C\otimes T(B'_1\otimes C''))\otimes TC'_1
\end{tikzcd}
$$

celle de (III), (V), (X), (XI), (XIII), (XVI), (XVIII) résulte de la fonctorialité de $a, c', \check{T}$ ; celle de (VII), (IX), (XIV) de la définition de $\omega'_1, \omega'_2, v'_1, v'_2$ ; celle de (VIII) de l'hypothèse et de la commutativité du diagramme (6) ; enfin celle de (XII) est évidente. D'où la commutativité du circuit extérieur, ce qui montre qu'on a bien $[A'\otimes B'', B'\otimes C'', \omega] = [A'_1\otimes B'', B'_1\otimes C'', \Omega]$. La démonstration de l'égalité $[A'_1\otimes B'', B'_1\otimes C'', \Omega] = [A'_1\otimes B''_1, B'_1\otimes C''_1, \omega_1]$ étant analogue, nous ne la faisons pas. On obtient donc

$$[A'\otimes B'', B'\otimes C'', \omega] = [A'_1\otimes B''_1, B'_1\otimes C''_1, \omega_1]$$

ce qui démontre la proposition. On pose

$$[A'\otimes B'', B'\otimes C'', \omega] = [B'', C'', v]\circ[A', B', u]$$

<u>Proposition 7</u>.– Soient $[A', B', u] \in \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}$, $[B'', C'', v] \in \Phi(B,C)/\mathcal{R}_{B,C}$, $[C', D', w] \in \Phi(C,D)/\mathcal{R}_{C,D}$. Alors $[C', D', w]\circ([B'', C'', v]\circ[A', B', u]) = ([C', D', w]\circ[B'', C'', v])\circ[A', B', u]$.

<u>Démonstration</u>.– En vertu de la définition de $\circ$ dans la proposition 6, nous avons

$$[C', D', w]\circ([B'', C'', v]\circ[A', B', u]) = [A'\otimes(B''\otimes C'), B'\otimes(C''\otimes D'), \alpha]$$

$$([C', D', w]\circ[B'', C'', v])\circ[A', B', u] = [(A'\otimes B'')\otimes C', (B'\otimes C'')\otimes D', \beta]$$

avec $\alpha, \beta$ définis par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
A\otimes T(A'\otimes(B''\otimes C')) \arrow[r, dashed] \arrow[ddd, "\alpha"'] & (A\otimes TA')\otimes T(B''\otimes C') \arrow[r, "u\otimes id"] & (B\otimes TB')\otimes T(B''\otimes C') \arrow[d, dashed] \\
 & & ((B\otimes TB'')\otimes TC')\otimes TB' \arrow[d, "(v\otimes id)\otimes id"'] \\
 & & ((C\otimes TC'')\otimes TC')\otimes TB' \arrow[d, dashed] \\
D\otimes T(B'\otimes(C''\otimes D')) \arrow[r, dashed] & ((D\otimes TD')\otimes TC'')\otimes TB' & ((C\otimes TC')\otimes TC'')\otimes TB' \arrow[l, "(w\otimes id)\otimes id"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
A\otimes T((A'\otimes B'')\otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[dddd, "\beta"'] & ((A\otimes TA')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[r, "(u\otimes id)\otimes id"] & ((B\otimes TB')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[d, dashed] \\
 & & ((B\otimes TB'')\otimes TB')\otimes TC' \arrow[d, "(v\otimes id)\otimes id"] \\
 & & ((C\otimes TC'')\otimes TB')\otimes TC' \arrow[dd, dashed] \\
 & & \\
D\otimes T((B'\otimes C'')\otimes D') \arrow[r, dashed] & (D\otimes TD')\otimes T(B'\otimes C'') & (C\otimes TC')\otimes T(B'\otimes C'') \arrow[l, "w\otimes id"']
\end{tikzcd}$$

Ensuite pour la démonstration il suffit de considérer le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
A\otimes T(A'\otimes(B''\otimes C')) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes Ta'"] \arrow[dr, phantom, "(III)"] \arrow[ddddd, bend right=60, "\alpha"'] & (A\otimes TA')\otimes T(B''\otimes C') \arrow[r, "u\otimes id"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(IV)"] & (B\otimes TB')\otimes T(B''\otimes C') \arrow[d, dashed] \arrow[ddr, dashed] & \\
A\otimes T((A'\otimes B'')\otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[ddd, "\beta"] \arrow[dddrr, phantom, "(II)"] & ((A\otimes TA')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[r, "(u\otimes id)\otimes id"] & ((B\otimes TB')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(V)"] & \\
 & & ((B\otimes TB'')\otimes TB')\otimes TC' \arrow[r, dashed] \arrow[d, "(v\otimes id)\otimes id"'] \arrow[dr, phantom, "(VI)"] & ((B\otimes TB'')\otimes TC')\otimes TB' \arrow[d, "(w\otimes id)\otimes id"] \\
 & & ((C\otimes TC'')\otimes TB')\otimes TC' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & ((C\otimes TC'')\otimes TC')\otimes TB' \arrow[ddl, dashed] \\
D\otimes T((B'\otimes C'')\otimes D') & (D\otimes TD')\otimes T(B'\otimes C'') \arrow[l, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(IX)"] & (C\otimes TC')\otimes T(B'\otimes C'') \arrow[l, "w\otimes id"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(VII)"] & \\
D\otimes T(B'\otimes(C''\otimes D')) \arrow[u, "id\otimes Ta'"] \arrow[ur, phantom, "(VIII)"] & ((D\otimes TD')\otimes TC'')\otimes TB' \arrow[l, dashed] & ((C\otimes TC')\otimes TC'')\otimes TB' \arrow[l, "(w\otimes id)\otimes id"'] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité des régions (II), (III), (IV), (V), (VI), (VII), (VIII), (IX) et du circuit extérieur peut être vérifiée aussitôt ; ce qui donne la commutativité de la région (I) et par suite l'égalité voulue en vertu de la remarque 1).

<u>Proposition 8</u>.- Soit $[A', B', u] \in \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}$. Alors

$$[A', B', u] \circ [C', C', id_{A\otimes TC'}] = [C', C', id_{B\otimes TC'}] \circ [A', B', u] = [A', B', u]$$

pour tout objet $C'$ de $\underline{A}'$.

<u>Démonstration</u>.- Il suffit d'appliquer (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12) et

les remarques 2) et 3).

Remarque 4). – jusqu'ici tout semble bien marcher, on serait tenté de poser pour la construction de la catégorie $\underline{P}$

$$\mathrm{Ob}\,\underline{P} = \mathrm{Ob}\,\underline{A}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{P}}(A,B) = \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}\ , \quad A,B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$$

la composition des flèches étant définie comme dans la proposition 6. Avec les propositions 7 et 8, $\underline{P}$ est effectivement une catégorie, mais elle ne répond pas au problème posé, l'ennui venant des flèches $T(c'_{A',A'})$, où $c'_{A',A'}$ sont les flèches de symétrie canonique dans la $\otimes$-catégorie AC $\underline{A}'$, les flèches $T(c'_{A',A'})$ sont en général différentes des identités ! Au cas où $T(c'_{A',A'}) = id$ pour tout $A' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$, ce qui arrive quand $\underline{A}'$ est stricte ~~la fonction $(T,\check{T})$ est tel que $T(c'_{A',A'}) = id$ pour tout $A' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$~~, on peut munir $\underline{P}$ d'une loi $\otimes$ et puis des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité de façon naturelle pour que $\underline{P}$ réponde à la question. Comme nous avons fait jusqu'ici, nous ne pouvons construire $\underline{P}$ en partant de $\underline{A}$, $\underline{A}'$, $(T,\check{T})$ avec les hypothèses donnés au début du n°. Pour pouvoir continuer, examinons de plus près le problème posé. Supposons que $(\underline{P}, (D,\check{D}), \lambda)$ en soit une solution, alors pour toute flèche de symétrie canonique $c'_{A',A'} : A'\otimes A' \xrightarrow{\sim} A'\otimes A'$, $A' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
DT(A'\otimes A') \arrow[r, "\lambda_{A'\otimes A'}", "\sim"'] \arrow[d, "DT(c'_{A',A'})"'] & I_{\underline{P}}(A'\otimes A') \arrow[d, "I_{\underline{P}}(c'_{A',A'}) = id"] \\
DT(A'\otimes A') \arrow[r, "\lambda_{A'\otimes A'}", "\sim"'] & I_{\underline{P}}(A'\otimes A')
\end{tikzcd}$$

nous donne $DT(c'_{A',A'}) = id$, ce qui montre que $(D,\check{D})$ se factorise en $\underline{A} \longrightarrow \underline{A}^{S} \longrightarrow \underline{P}$, $S$ étant la partie multiplicative de $\underline{A}$ engendrée par l'ensemble des endomorphismes de $\underline{A}$ de la forme $T(c'_{A',A'})$ et $\underline{A}^{S}$ la $\otimes$-catégorie AC quotient de $\underline{A}$ définie par $S$ (n°1, Déf. 1 et 2). Donc si on part de $\underline{A}^{\varphi}$, $\underline{A}'$ et du $\otimes$-foncteur composé $\underline{A}' \longrightarrow \underline{B} \longrightarrow \underline{A}^{\varphi}$, la construction de $\underline{P}$ marchera comme nous avons signalé ci-dessous. Dans le but de simplifier les notations, nous pouvons considérer le problème comme posé pour $(T,\check{T}) : \underline{A}' \longrightarrow \underline{A}$ avec $T(c'_{A',A'}) = id$ pour tout $A' \in Ob\,\underline{A}'$.

<u>Proposition 9</u>.- Soient $[A',B',u] \in \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B} = Hom_{\underline{P}}(A,B)$, $[B',C',v] \in \Phi(B,C)/\mathcal{R}_{B,C} = Hom_{\underline{P}}(B,C)$ (voir la définition de la catégorie $\underline{P}$ dans la remarque 4)). Alors

$$[B',C',v]\circ[A',B',u] = [A',C',vu] .$$

Si $u$ est un isomorphisme dans $\underline{A}$, $[A',B',u]$ est un isomorphisme dans $\underline{P}$, son inverse étant $[B',A',u^{-1}]$.

<u>Démonstration</u>.- En vertu de la définition de la loi de composition des flèches de $\underline{P}$ (Prop. 6), nous avons

$$[B',C',v]\circ[A',B',u] = (A'\otimes B', B'\otimes C', \omega]$$

avec $\omega$ défini par le diagramme commutatif (8) où l'on fait $B'' = B'$. Or $c_{TB',TB'} = id$ en vertu du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
TB'\otimes TB' \arrow[r, "\overset{\check{T}}{\sim}"] \arrow[d, "c_{TB',TB'}"'] & T(B'\otimes B') \arrow[d, "T(c'_{B',B'})"] \\
TB'\otimes TB' \arrow[r, "\overset{\check{T}}{\sim}"] & T(B'\otimes B')
\end{tikzcd}$$

et de l'hypothèse $T(c'_{B',B'}) = id$ pour tout $B' \in Ob\,\underline{A}'$ (Rem. 4)). Par conséquent le diagramme commutatif (8) devient le contour extérieur du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
A\otimes T(A'\otimes B') \arrow[d, "\omega"'] \arrow[dr, "\omega_1"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "(\mathrm{I})"] & A\otimes(TA'\otimes TB') \arrow[l, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA')\otimes TB' \arrow[r, "u\otimes id"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{II})"] & (B\otimes TB')\otimes TB' \arrow[d, "v\otimes id"] \\
C\otimes T(B'\otimes C') & C\otimes T(C'\otimes B') \arrow[l, "id\otimes Tc'"'] & C\otimes(TC'\otimes TB') \arrow[l, "id\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (C\otimes TC')\otimes TB'
\end{tikzcd}$$

dans lequel $\omega_1$ est défini tel que la région (II) soit commutative, ce qui donne la commutativité de la région (I). En vertu de la remarque 2)

on a $[A', C', vu] = [A' \otimes B', C' \otimes B', \omega_1]$ ; et de la remarque 1),
$[A' \otimes B', C' \otimes B', \omega_1] = [A' \otimes B', B' \otimes C', \omega]$. D'où l'égalité voulue.

Supposons que $u$ soit un isomorphisme dans $\underline{A}$. D'après ce que nous venons de démontrer, nous avons

$$[B', A', u^{-1}] \circ [A', B', u] = [A', A', id_{A \otimes TA'}]$$

$$[A', B', u] \circ [B', A', u^{-1}] = [B', B', id_{B \otimes TB'}]$$

ce qui montre, en vertu de la proposition 8, que $[B', A', u^{-1}]$ est l'inverse de $[A', B', u]$.

Nous allons maintenant munir $\underline{P}$ d'une $\otimes$-structure et des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité.

<u>Proposition 10</u>.- Soient $[A', B', u] \in Hom_{\underline{P}}(A, B)$, $[E', F', v] \in Hom_{\underline{P}}(E, F)$. Alors la classe d'équivalence

$$[A' \otimes E', B' \otimes F', w]$$

avec $w$ défini par le diagramme commutatif

(9)
$$\begin{tikzcd}
(A \otimes TA') \otimes (E \otimes TE') \arrow[r, "u \otimes v"] \arrow[d, dashed] & (B \otimes TB') \otimes (F \otimes TF') \arrow[d, dashed] \\
(A \otimes E) \otimes T(A' \otimes E') \arrow[r, "w"] & (B \otimes F) \otimes T(B' \otimes F')
\end{tikzcd}$$

est indépendante des représentants des classes $[A', B', u]$, $[E', F', v]$.

<u>Démonstration</u>.- Soient $[A'_1, B'_1, u_1] = [A', B', u]$, $[E'_1, F'_1, v_1] = [E, F, v]$. Montrons d'abord

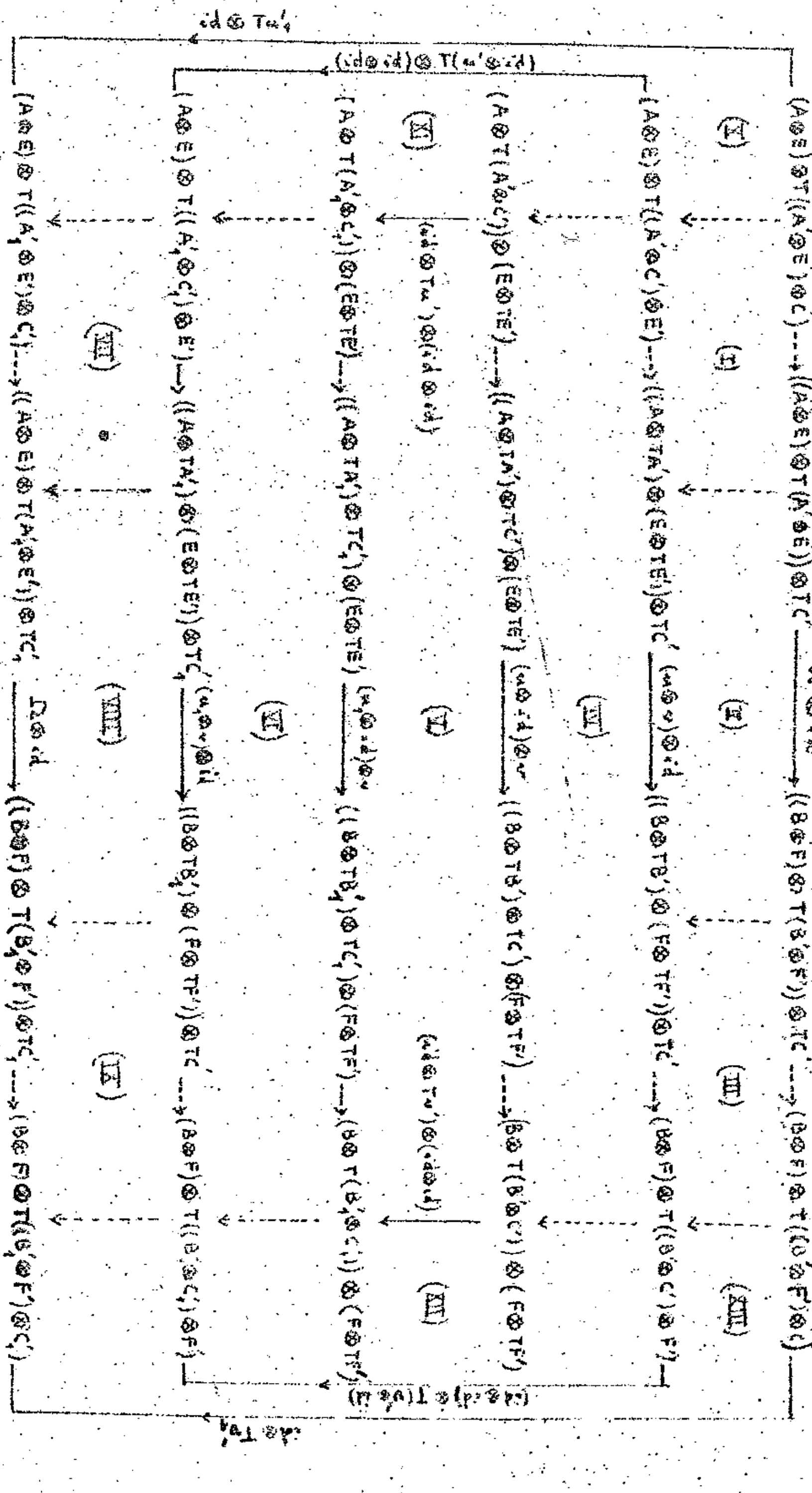
$$[A' \otimes E', B' \otimes F', w] = [A'_1 \otimes E', B'_1 \otimes F', \Omega]$$

$\Omega$ étant défini par un diagramme commutatif analogue à (9) où l'on a remplacé $A', B', u$ par $A'_1, B'_1, u_1$. L'hypothèse $[A', B', u] = [A'_1, B'_1, u_1]$ nous donne des objets $C', C'_1$ de $\underline{A}'$ et des isomorphismes $u' : A' \otimes C' \xrightarrow{\sim} A'_1 \otimes C'_1$,

$v' : B'\otimes C' \rightrightarrows B'_1\otimes C'_1$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
A\otimes T(A'\otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes Tu'"'] & (A\otimes TA')\otimes TC' \arrow[r, "u\otimes id"] & (B\otimes TB')\otimes TC' \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B'\otimes C') \arrow[d, "id\otimes Tv'"] \\
A\otimes T(A'_1\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] & (A\otimes TA'_1)\otimes TC'_1 \arrow[r, "u_1\otimes id"] & (B\otimes TB'_1)\otimes TC'_1 \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B'_1\otimes C'_1)
\end{tikzcd}$$

Considérons maintenant le diagramme



où la commutativité des régions (I), (III), (VII), (IX) résulte de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12) ; celle de (II), (VIII) de la définition de $W$ et $\Omega$ (Diag. (9)) ; celle de (IV), (VI), (XI), (XII) de la fonctorialité de $a, c, \check{T}$ ; celle de (V) de l'égalité $[A', B', u'] = [A'_1, B'_1, u'_1]$ ; enfin celle de (X), (XIII) de la définition de $u'_1, v'_1$ par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccc}
(A'\otimes C')\otimes E' & \xrightarrow{u'\otimes id} & (A'_1\otimes C'_1)\otimes E' \\
\downarrow & & \downarrow \\
(A'\otimes E')\otimes C' & \xrightarrow{u'_1} & (A'_1\otimes E')\otimes C'_1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(B'\otimes C')\otimes F' & \xrightarrow{v'\otimes id} & (B'_1\otimes C'_1)\otimes F' \\
\downarrow & & \downarrow \\
(B'\otimes F')\otimes C' & \xrightarrow{v'_1} & (B'_1\otimes F')\otimes C'_1
\end{array}$$

On en conclut la commutativité du circuit extérieur, ce qui donne l'égalité $[A'\otimes E', B'\otimes F', W] = [A'_1\otimes E', B'_1\otimes F', \Omega]$. De la même manière on démontre que $[A'_1\otimes E', B'_1\otimes F', \Omega] = [A'_1\otimes E'_1, B'_1\otimes F'_1, W_1]$, ce qui achève la démonstration.

<u>Proposition 11</u>.– Les applications suivantes

$$\otimes : Ob(\underline{P}\times\underline{P}) \longrightarrow Ob\,\underline{P}$$
$$(A,E) \longmapsto A\otimes E$$

$$\otimes : Fl(\underline{P}\times\underline{P}) \longrightarrow Fl\,\underline{P}$$

$$([A',B',u],[E',F',v]) \longmapsto [A'\otimes E', B'\otimes F', W]$$

où $[A',B',u] : A \to B$, $[E',F',v] : E \to F$ sont des flèches de $\underline{P}$, et $W$ est défini par le diagramme commutatif (9) ; définissent un foncteur

$$\otimes : \underline{P}\times\underline{P} \to \underline{P}.$$

<u>Démonstration</u>.– Tout d'abord remarquons que pour deux flèches $f : A \to B$, $g : B \to C$ de $\underline{P}$, on peut toujours les mettre sous la forme

$f=[A',B',u]$, $g=[B',C',x]$ telle que "l'extrémité" $B'$ de $f$ coïncide avec "l'origine" $B'$ de $g$ (Remarques 2) et 3)). Cela étant, soient

$$A \xrightarrow{[A',B',u]} B \xrightarrow{[B',C',x]} C \qquad E \xrightarrow{[E',F',v]} F \xrightarrow{[F',G',y]} G$$

et soient

$$[A'\otimes E', B'\otimes F', w] = [A',B',u]\otimes[E',F',v]$$

$$[B'\otimes F', C'\otimes G', z] = [B',C',x]\otimes[F',G',y]$$

Montrons que

$$[A'\otimes E', C'\otimes G', zw] = [A',C',xu]\otimes[E',G',yv]$$

Pour cela considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes TA')\otimes(E\otimes TE') \arrow[rr, "xu\otimes yv"] \arrow[d, equal] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{I})"] & & (C\otimes TC')\otimes(G\otimes TG') \arrow[d, equal] \\
(A\otimes TA')\otimes(E\otimes TE') \arrow[r, "u\otimes v"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & (B\otimes TB')\otimes(F\otimes TF') \arrow[r, "x\otimes y"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (C\otimes TC')\otimes(G\otimes TG') \arrow[d, dashed] \\
(A\otimes E)\otimes T(A'\otimes E') \arrow[r, "w"] & (B\otimes F)\otimes T(B'\otimes F') \arrow[r, "z"] & (C\otimes G)\otimes T(C'\otimes G')
\end{tikzcd}$$

où la commutativité de la région (I) est évidente ; et celle de (II), (III) vient de la définition de $w$ et $z$ respectivement. D'où la commutativité du circuit extérieur qui donne l'égalité voulue.

Enfin soit

$$A \xrightarrow{[A',A',id_{A\otimes TA'}]} A$$

la flèche d'identité de l'objet $A$ (Prop. 8). La flèche

$$[A',A',id_{A\otimes TA'}]\otimes[A',A',id_{A\otimes TA'}] = [A'\otimes A', A'\otimes A', id_{(A\otimes A)\otimes T(A'\otimes A')}]$$

est bien la flèche d'identité de l'objet $A\otimes A$, ce qui achève la démonstration. $\mathcal{P}$ est donc une $\otimes$-catégorie.

<u>Proposition 12</u>.– $[A', A', a_{A,B,C} \otimes id_{TA'}] : A \otimes (B \otimes C) \xrightarrow{\sim} (A \otimes B) \otimes C$ est une contrainte d'associativité pour la $\otimes$-catégorie $\underline{P}$, $A'$ étant un objet quelconque de $\underline{A}'$.

<u>Démonstration</u>.– Tout d'abord remarquons que pour $A, B, C$ donnés, la flèche $[A', A', a \otimes id_{TA'}]$ est bien définie en vertu des égalités

$$[A', A', a_{A,B,C} \otimes id_{TA'}] = [A' \otimes B', A' \otimes B', a_{A,B,C} \otimes id_{T(A' \otimes B')}]$$

$$= [B', B', a_{A,B,C} \otimes id_{TB'}] \qquad (\text{Rem. 2) et 3)});$$

pour tout objet $B'$ de $\underline{A}'$. D'où on peut écrire

$$[A', A', a_{A,B,C} \otimes id_{TA'}] = [A' \otimes (B' \otimes C'), A' \otimes (B' \otimes C'), a_{A,B,C} \otimes id_{T(A' \otimes (B' \otimes C'))}]$$

et, en vertu de la remarque 1)

$$[A' \otimes (B' \otimes C'), A' \otimes (B' \otimes C'), a_{A,B,C} \otimes id_{T(A' \otimes (B' \otimes C'))}] = [A' \otimes (B' \otimes C'), (A' \otimes B') \otimes C', a_{A,B,C} \otimes Ta'_{A',B',C'}]$$

pour $B', C' \in \mathrm{Ob}\, \underline{A}'$.

Cela étant, montrons que $[A', A', a_{A,B,C} \otimes id_{TA'}]$ est fonctoriel en $A, B, C$. Il nous suffit de montrer qu'il est fonctoriel en un des trois arguments, par exemple $A$, la démonstration pour les deux autres étant analogue. Soit $[A', A'_1, u] : A \to A_1$, nous allons montrer que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{CD}
A \otimes (B \otimes C) @>{[A' \otimes (B' \otimes C'),\, (A' \otimes B') \otimes C',\, a_{A,B,C} \otimes Ta'_{A',B',C'}]}>> (A \otimes B) \otimes C \\
@V{[A', A'_1, u] \otimes (id \otimes id)}VV @VV{([A', A'_1, u] \otimes id) \otimes id}V \\
A_1 \otimes (B \otimes C) @>{[A'_1 \otimes (B' \otimes C'),\, (A'_1 \otimes B') \otimes C',\, a_{A_1,B,C} \otimes Ta'_{A'_1,B',C'}]}>> (A_1 \otimes B) \otimes C
\end{CD}$$

D'abord nous avons

$$id_B = [B', B', id_{B \otimes TB'}], \quad id_C = [C', C', id_{C \otimes TC'}]$$

Posons

$$[A', A'_1, u] \otimes ([B', B', id] \otimes [C', C', id]) = [A' \otimes (B' \otimes C'), A'_1 \otimes (B' \otimes C'), u_1]$$

$([A', A'_1, u] \otimes [B', B', id]) \otimes [C', C', id] = [(A' \otimes B') \otimes C', (A'_1 \otimes B') \otimes C', u_2]$

où $u_1$ et $u_2$ sont définis par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes T(A' \otimes (B' \otimes C')) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, dashed] & (A_1 \otimes (B \otimes C)) \otimes T(A'_1 \otimes (B' \otimes C')) \arrow[d, dashed] \\
(A \otimes TA') \otimes ((B \otimes TB') \otimes (C \otimes TC')) \arrow[r, "u \otimes (id \otimes id)"] & (A_1 \otimes TA'_1) \otimes ((B \otimes TB') \otimes (C \otimes TC'))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes T((A' \otimes B') \otimes C') \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, dashed] & ((A_1 \otimes B) \otimes C) \otimes T((A'_1 \otimes B') \otimes C') \arrow[d, dashed] \\
((A \otimes TA') \otimes (B \otimes TB')) \otimes (C \otimes TC') \arrow[r, "(u \otimes id) \otimes id"] & ((A_1 \otimes TA'_1) \otimes (B \otimes TB')) \otimes (C \otimes TC')
\end{tikzcd}$$

en vertu de la définition du produit tensoriel des flèches de $P$ dans la proposition 10. Donc la démonstration de la commutativité du diagramme revient à celle de l'égalité

$[A' \otimes (B' \otimes C'), (A'_1 \otimes B') \otimes C', u_2(a \otimes Ta')] = [A' \otimes (B' \otimes C'), (A'_1 \otimes B') \otimes C', (a \otimes Ta') u_1]$.

Or le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& (A \otimes TA') \otimes ((B \otimes TB') \otimes (C \otimes TC')) \arrow[r, "u \otimes (id \otimes id)"] \arrow[ddd, "a"] \arrow[dddr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & (A_1 \otimes TA'_1) \otimes ((B \otimes TB') \otimes (C \otimes TC')) \arrow[dr, dashed] \arrow[ddd, "a"'] & \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes T(A' \otimes (B' \otimes C')) \arrow[ur, dashed] \arrow[rrr, bend left=60, "u_1", "\mathrm{(I)}"'] \arrow[d, phantom, shift left=40, "\mathrm{(II)}"] & & & (A_1 \otimes (B \otimes C)) \otimes T(A'_1 \otimes (B' \otimes C')) \arrow[d, "a \otimes Ta'"] \arrow[d, phantom, shift right=40, "\mathrm{(IV)}"] \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes T((A' \otimes B') \otimes C') \arrow[u, "a \otimes Ta'"] \arrow[dr, dashed] \arrow[rrr, bend right=60, "u_2"', "\mathrm{(V)}"] & & & ((A_1 \otimes B) \otimes C) \otimes T((A'_1 \otimes B') \otimes C') \\
& ((A \otimes TA') \otimes (B \otimes TB')) \otimes (C \otimes TC') \arrow[r, "(u \otimes id) \otimes id"] & ((A_1 \otimes TA'_1) \otimes (B \otimes TB')) \otimes (C \otimes TC') \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

a les régions (I), (V) commutatives en vertu de la définition de $u_1$, $u_2$ respectivement ; les ~~[illegible]~~ régions (II), (IV) en vertu de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12) ;

enfin la région (III) en vertu de la fonctorialité de a. On en conclut la commutativité du circuit extérieur, et par suite l'égalité $u_2(a\otimes Ta') = (a\otimes Ta')u_1$.

Pour montrer que l'axiome du pentagone est satisfait, écrivons les flèches

$$[A', A', a_{A,B,C}\otimes id_{TA'}] : A\otimes(B\otimes C) \xrightarrow{\sim} (A\otimes B)\otimes C$$

sous la forme

$$[A'\otimes(B'\otimes C'), (A'\otimes B')\otimes C', a_{A,B,C}\otimes Ta'_{A',B',C'}]$$

et remarquons qu'on a

$$[W', W', id_{W\otimes TW'}]\otimes[X'\otimes(Y'\otimes Z'), (X'\otimes Y')\otimes Z', a_{X,Y,Z}\otimes Ta'_{X',Y',Z'}] =$$

$$= [W'\otimes(X'\otimes(Y'\otimes Z')), W'\otimes((X'\otimes Y')\otimes Z'), (id_W\otimes a_{X,Y,Z})\otimes T(id_{W'}\otimes a'_{X',Y',Z'})]$$

et

$$[W'\otimes(X'\otimes Y'), (W'\otimes X')\otimes Y', a_{W,X,Y}\otimes Ta'_{W',X',Y'}]\otimes[Z', Z', id_{Z\otimes TZ'}] =$$

$$= [(W'\otimes(X'\otimes Y'))\otimes Z', ((W'\otimes X')\otimes Y')\otimes Z', (a_{W,X,Y}\otimes id_Z)\otimes T(a'_{W',X',Y'}\otimes id_{Z'})]$$

Ces remarques faites, l'axiome du pentagone est réalisé dans $\underline{P}$ en vertu du fait qu'il est réalisé dans $\underline{A}$ et $\underline{A}'$. D'où la proposition.

<u>Proposition 13</u>.- $[A', A', c_{A,B}\otimes id_{TA'}] : A\otimes B \xrightarrow{\sim} B\otimes A$ est une contrainte de commutativité pour la $\otimes$-catégorie $\underline{P}$, $A'$ étant un objet quelconque de $\underline{A}'$.

<u>Démonstration</u>.- En vertu des remarques 2) et 3) on a

$$[A', A', c_{A,B}\otimes id_{TA'}] = [A'\otimes B', A'\otimes B', c_{A,B}\otimes id_{T(A'\otimes B')}] = [B', B', c_{A,B}\otimes id_{TB'}]$$

pour tout $B'\in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$, ce qui montre que la flèche $[A', A', c_{A,B}\otimes id_{TA'}]$ est bien définie pour $A, B$ donnés. Ensuite la fonctorialité et l'autocompatibilité

(Chap. I, §2, n° 2, Déf. 6, Rel. (4)) de $[A', A', c_{A,B} \otimes id_{TA'}]$ s'obtiennent en remarquant qu'on a

$$[A', A', c_{A,B} \otimes id_{TA'}] = [A' \otimes B', B' \otimes A', c_{A,B} \otimes Tc'_{A',B'}]$$

$B'$ étant un objet quelconque de $\underline{A}'$.

<u>Proposition 14</u>.— Soit $A'_0 \in Ob\,\underline{A}'$. Alors le triple

$$(1_{\underline{P}} = TA_0 ,\; g_A = [A'_0 \otimes A', A', t_A],\; d_A = [A'_0 \otimes A', A', p_A])$$

où $A'$ est un objet quelconque de $\underline{A}'$, $A$ varie dans $Ob\,\underline{A}$, et les isomorphismes $t_A$, $p_A$ sont définis par les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \otimes T(A'_0 \otimes A') \arrow[d, "t_A"'] & A \otimes (TA'_0 \otimes TA') \arrow[l, "id \otimes \breve{T}"'] \arrow[d, "a"] \\ (TA'_0 \otimes A) \otimes TA' & (A \otimes TA'_0) \otimes TA' \arrow[l, "c \otimes id"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes T(A'_0 \otimes A') \arrow[d, "p_A"'] & A \otimes (TA'_0 \otimes TA') \arrow[l, "id \otimes \breve{T}"'] \arrow[d, "a"] \\ (A \otimes TA'_0) \otimes TA' \arrow[r, equal] & (A \otimes TA'_0) \otimes TA' \end{tikzcd}$$

constitue une contrainte d'unité pour la $\otimes$-catégorie $\underline{P}$.

<u>Démonstration</u>.— D'abord démontrons que les isomorphismes ne dépendent pas de $A'$. Soit $B'$ un objet quelconque de $\underline{A}'$. les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] A \otimes T((A'_0 \otimes A') \otimes B') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "id \otimes T(\cdot)"'] & (A \otimes T(A'_0 \otimes A')) \otimes TB' \arrow[r, "t_A \otimes id"] & ((TA'_0 \otimes A) \otimes TA') \otimes TB' \arrow[r, dashed] & (TA'_0 \otimes A) \otimes T(A' \otimes B') \arrow[d, dashed, "id \otimes T(\cdot)"] \\ A \otimes T((A'_0 \otimes B') \otimes A) \arrow[r, dashed] & (A \otimes T(A'_0 \otimes B')) \otimes TA' \arrow[r, "t_A \otimes id"] & ((TA'_0 \otimes A) \otimes TB') \otimes TA' \arrow[r, dashed] & (TA'_0 \otimes A) \otimes T(B' \otimes A') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] A \otimes T((A'_0 \otimes A') \otimes B') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "id \otimes T(\cdot)"'] & (A \otimes T(A'_0 \otimes A')) \otimes TB' \arrow[r, "p_A \otimes id"] & ((A \otimes TA'_0) \otimes TA') \otimes TB' \arrow[r, dashed] & (A \otimes TA'_0) \otimes T(A' \otimes B') \arrow[d, dashed, "id \otimes T(\cdot)"] \\ A \otimes T((A'_0 \otimes B') \otimes A') \arrow[r, dashed] & (A \otimes T(A'_0 \otimes B')) \otimes TA' \arrow[r, "p_A \otimes id"] & ((A \otimes TA'_0) \otimes TB') \otimes TA' \arrow[r, dashed] & (A \otimes TA'_0) \otimes T(B' \otimes A') \end{tikzcd}$$

sont commutatifs: en remarquant que $t_A$ et $p_A$ sont des composés des flèches construits à l'aide de $a$, $c$, $\breve{T}$, des identités et de la loi $\otimes$, et en appliquant (Chap. I, §4, n° 2, Prop. 12), ce qui montre que

$$[A'_0 \otimes A', A', t_A] = [A'_0 \otimes B', B', t_A]$$

et

$$[A'_0 \otimes A', A', p_A] = [A'_0 \otimes B', B', p_A]$$

i.e $[A'_0 \otimes A', A', t_A]$, $[A'_0 \otimes A', A', p_A]$ ne dépendent pas de $A'$. Ces isomorphismes sont en plus fonctoriels en $A$ en vertu de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12) et de la fonctorialité de $c$, $\check{T}$. Enfin pour $A = \underline{1}_P$, on a $t_A = p_A$ en vertu de $T(c'_{A',A'}) = id$ pour tout $A' \in Ob\,\underline{A}'$ (Rem. 41), ce qui donne $g_{\underline{1}_P} = d_{\underline{1}_P}$.

<u>Proposition 15</u>.– La $\otimes$-catégorie $\underline{P}$ munie des contraintes d'associativité $[A', A', a_{A,B,C} \otimes id_{TA'}]$, de commutativité $[A', A', c_{A,B} \otimes id_{TA'}]$ et d'unité $(\underline{1}_P, [A'_0 \otimes A', A', t_A], [A'_0 \otimes A', A', p_A])$ est une $\otimes$-catégorie ACU.

<u>Démonstration</u>.– En vertu de (Chap. I, §3, n°4, Prop. 12), il nous suffit de démontrer que $[A', A', a \otimes id]$ est compatible respectivement avec $[A', A', c \otimes id]$ et $(\underline{1}_P, g, d)$.

La compatibilité de $[A', A', a \otimes id]$ avec $[A', A', c \otimes id]$ s'obtient en remarquant comme dans les propositions 12 et 13 qu'on peut écrire

$$[A', A', a_{X,Y,Z} \otimes id_{TA'}] = [X' \otimes (Y' \otimes Z'), (X' \otimes Y') \otimes Z', a_{X,Y,Z} \otimes Ta'_{X',Y',Z'}]$$

$$[A', A', c_{X\otimes Y, Z} \otimes id_{TA'}] = [(X' \otimes Y') \otimes Z', Z' \otimes (X' \otimes Y'), c_{X\otimes Y, Z} \otimes Tc'_{X'\otimes Y', Z'}]$$

$$[X' \otimes Z', Z' \otimes X', c_{X,Z} \otimes Tc'_{X',Z'}] \otimes [Y', Y', id_{Y\otimes TY'}] =$$

$$= [(X' \otimes Z') \otimes Y', (Z' \otimes X') \otimes Y', (c_{X,Z} \otimes id_Y) \otimes T(c'_{X',Z'} \otimes id_{Y'})]$$

$$[X', X', id_{X \otimes TX'}] \otimes [Y' \otimes Z', Z' \otimes Y', c_{Y,Z} \otimes Tc'_{Y',Z'}] =$$

$$= [X' \otimes (Y' \otimes Z'), X' \otimes (Z' \otimes Y'), (id_X \otimes c_{Y,Z}) \otimes T(id_{X'} \otimes c'_{Y',Z'})]$$

et que l'axiome de l'hexagone est satisfait dans $\underline{A}$ et $\underline{A}'$.

Enfin la compatibilité de $[A', A', a \otimes id]$ avec $(\underline{1}_P, g, d)$ résulte aussitôt de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12).

Proposition 16.- Soient

$$D : \mathrm{Ob}\,\underline{A} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\underline{P}$$
$$A \longmapsto A$$

$$D : \mathrm{Fl}\,\underline{A} \longrightarrow \mathrm{Fl}\,\underline{P}$$
$$\left(u : A \longrightarrow B\right) \longmapsto [A', A', u \otimes id_{TA'}]$$

$A'$ étant un objet quelconque de $\underline{A}'$,

$$\breve{D}_{A,B} = id_{A \otimes B}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$. Alors $(D, \breve{D})$ est un $\otimes$-foncteur de $\underline{A}$ dans $\underline{P}$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{P}$.

Démonstration.- Comme on a remarqué dans les propositions 12 et 13 ; la flèche $[A', A', u \otimes id_{TA'}]$ est indépendante de l'objet $A'$. En en vertu des propositions 8 et 9 ; nous avons

$$[A', A', id_A \otimes id_{TA'}] = id_A \quad (\text{dans } \underline{P})$$

$$[A', A', vu \otimes id_{TA'}] = [A', A', v \otimes id_{TA'}] \circ [A', A', u \otimes id_{TA'}]$$

ce qui montre que $D$ est un foncteur de $\underline{A}$ dans $\underline{P}$. En outre, pour $u : A \to A_1$ et $v : B \to B_1$, l'égalité

$$[A', A', u \otimes id_{TA'}] \otimes [B', B', v \otimes id_{TB'}] = [A' \otimes B', A' \otimes B', (u \otimes v) \otimes id_{T(A' \otimes B')}]$$

venant de la fonctorialité de $a, c, \breve{T}$ nous montre que $\breve{D}$ est un isomorphisme fonctoriel. Enfin la compatibilité de $(D, \breve{D})$ avec les contraintes d'associativité, de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{P}$ se vérifie aussitôt en partant de la définition du $\otimes$-foncteur $(D, \breve{D})$ et des contraintes d'associativité, de commutativité dans $\underline{P}$.

Proposition 17.- Il existe un $\otimes$-isomorphisme ~~fonctoriel~~

$$\lambda : (D, \breve{D}) \circ (T, \breve{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{P}}, \breve{I}_{\underline{P}})$$

où $(I_{\underline{P}}, \breve{I}_{\underline{P}})$ est le $\otimes$-foncteur $1_{\underline{P}}$ constant de $\underline{A}'$ dans $\underline{P}$ (Déf. 3).

Démonstration.- Soit $A'$ un objet de $\underline{A}'$, considérons la flèche $\lambda_{A'}$ dans $\underline{P}$

(10) $$DTA' = TA' \xrightarrow{\lambda_{A'} = [A'_0,\, A',\, c_{TA', TA'_0}]} I_{\underline{P}} A' = TA'_0$$

$\lambda_{A'}$ est bien un isomorphisme dans $\underline{P}$ puisque $c_{TA',TA'_0}$ est un isomorphisme dans $\underline{A}$ (Prop. 9). Montrons que $\lambda$ est fonctoriel en $A'$. Considérons le diagramme suivant où $u' : A' \to A''$ est une flèche de $\underline{A}'$ et

$$\begin{tikzcd}
DTA' = TA' \arrow[r, "{[A'_0,\, A',\, c_{TA',TA'_0}]}"] \arrow[d, "{DTu' = [A'_0,\, A'_0,\, Tu' \otimes id_{TA'_0}]}"'] & I_{\underline{P}} A' = TA'_0 \arrow[d, equal, "I_{\underline{P}} u'"] \\
DTA'' = TA'' \arrow[r, "{[A'_0,\, A'',\, c_{TA'',TA'_0}]}"] & I_{\underline{P}} A'' = TA'_0
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité se réalise si on a l'égalité

$$[A'_0, A', c_{TA',TA'_0}] = [A'_0, A'', c_{TA'',TA'_0}(Tu' \otimes id_{TA'_0})]$$

Or la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
TA' \otimes TA'_0 \arrow[r, "c_{TA',TA'_0}"] \arrow[d, "id \otimes Tid"'] & TA'_0 \otimes TA' \arrow[d, "id \otimes Tu'"] \\
TA' \otimes TA'_0 \arrow[r, "(id \otimes Tu')c_{TA',TA'_0}"] & TA'_0 \otimes TA''
\end{tikzcd}$$

nous donne

$$[A'_0, A', c_{TA',TA'_0}] = [A'_0, A'', (id \otimes Tu')\, c_{TA',TA'_0}]$$

en vertu de la remarque 1), et celle du diagramme

$$\begin{tikzcd}
TA' \otimes TA'_0 \arrow[r, "c_{TA',TA'_0}"] \arrow[d, "Tu' \otimes id"'] & TA'_0 \otimes TA' \arrow[d, "id \otimes Tu'"] \\
TA'' \otimes TA'_0 \arrow[r, "c_{TA'',TA'_0}"] & TA'_0 \otimes TA''
\end{tikzcd}$$

venant de la fonctorialité de $c$, nous donne

$$[A'_0, A'', c_{TA'',TA'_0}(Tu' \otimes id_{TA'_0})] = [A'_0, A'', (id \otimes Tu')\, c_{TA',TA'_0}]$$

D'où l'égalité voulue, ce qui montre que $\lambda$ est un morphisme fonctoriel. Il nous reste à prouver que $\lambda$ est un $\otimes$-morphisme, i.e le diagramme

$$\begin{array}{ccc} DTA'\otimes DTB' & \xrightarrow{\breve{DT}} & DT(A'\otimes B') \\ \lambda_{A'}\otimes\lambda_{B'}\downarrow & & \downarrow \lambda_{A'\otimes B'} \\ I_{\underline{P}}A'\otimes I_{\underline{P}}B' & \xrightarrow{\breve{I}_{\underline{P}}} & I_{\underline{P}}(A'\otimes B') \end{array}$$

est commutatif pour $A', B' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$. La définition de $\breve{DT}_{A',B'}$ (Chap. I, §4, n°1, Déf. 2) nous donne

$$\breve{DT}_{A',B'} = [C', C', \breve{T}_{TA',TB'} \otimes id_{TC'}] \quad , \; C' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$$

que nous écrivons ici

$$\breve{DT}_{A',B'} = [A'_0\otimes(A'_0\otimes A'_0), A'_0\otimes(A'_0\otimes A'_0), \breve{T}_{TA',TB'} \otimes id_{T(A'_0\otimes(A'_0\otimes A'_0))}]$$

En plus en appliquant les remarques 2) et 3) où on prend successivement les isomorphismes $id: A'_0 \to A'_0$, $id: A'_0\otimes A'_0 \to A'_0\otimes A'_0$, $id: A'\otimes B' \to A'\otimes B'$, nous obtenons

$$\lambda_{A'}\otimes\lambda_{B'} = [A'_0, A', c_{TA',TA'_0}] \otimes [A'_0, B', c_{TB',TA'_0}] = [A'_0\otimes A'_0, A'\otimes B', w] =$$

$$= [A'_0\otimes(A'_0\otimes A'_0), A'_0\otimes(A'\otimes B'), \overset{2}{w}] \;,\; w \text{ étant défini par (9)}$$

$$\lambda_{A'\otimes B'} = [A'_0, A'\otimes B', c_{T(A'\otimes B'),TA'_0}] =$$

$$= [A'_0\otimes(A'_0\otimes A'_0), (A'\otimes B')\otimes(A'_0\otimes A'_0), \tilde{c}_{T(A'\otimes B'),TA'_0}]$$

$$\breve{I}_{\underline{P}}(A',B') = d^{-1}_{1_{\underline{P}}} = [A'_0, A'_0\otimes A'_0, p^{-1}_{TA'_0}] = [A'_0\otimes(A'\otimes B'), (A'_0\otimes A'_0)\otimes(A'\otimes B'), \tilde{p}^{-1}_{TA'_0}]$$

Cela étant, la commutativité du diagramme considéré résulte de la remarque 1) et de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12).

<u>Proposition 18</u>.– Soient $\underline{Q}$ une $\otimes$-catégorie ACU, $(E,\breve{E})$ un $\otimes$-foncteur de $\underline{A}$ dans $\underline{Q}$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{Q}$ tel qu'il existe un $\otimes$-isomorphisme ~~foncteur~~

$$\mu : (E,\breve{E}) \circ (T,\breve{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{Q}}, \breve{I}_{\underline{Q}})$$

Alors il existe un $\otimes$-foncteur ACU et un seul $(E',\breve{E}')$ de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$

tel que $(E,\breve{E}) = (E',\breve{E}') \circ (D,\breve{D})$ et que le diagramme

$$\begin{tikzcd} E'(DTA') \arrow[r, "E'(\lambda_{A'})"] & E'(\underline{1}_{\underline{P}}) \\ ETA' \arrow[u, equal] \arrow[r, "\mu_{A'}"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[u, "\hat{E}'"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif pour tout $A' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$, $\hat{E}' : \underline{1}_{\underline{Q}} \xrightarrow{\sim} E'(\underline{1}_{\underline{P}})$ étant l'isomorphisme venant de la compatibilité de $(E',\breve{E}')$ avec les unités de $\underline{P}$ et $\underline{Q}$.

<u>Démonstration</u>.- 1° Unicité de $(E',\breve{E}')$. Supposons que $(E',\breve{E}')$ existe. Alors l'égalité $(E,\breve{E}) = (E',\breve{E}') \circ (D,\breve{D})$ nous donne

$$E'D = E \ ; \ \breve{E'D} = \breve{E}$$

ou en vertu de la définition de $(D,\breve{D})$ (Prop. 16)

(11) $$E'(A) = E(A) \ , \ \breve{E}'_{A,B} = \breve{E}_{A,B}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P} = \mathrm{Ob}\,\underline{A}$. Faisons $A' = A'_0$ dans la formule (10) donnant $\lambda_{A'}$, nous obtenons $\lambda_{A'_0} = id$ puisque $T(c'_{A'_0,A'_0}) = id$, ce qui nous donne

(12) $$\hat{E}' = \mu^{-1}_{A'_0}$$

à partir du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E'(DTA'_0) \arrow[r, "E'(\lambda_{A'_0}) = id"] & E'(\underline{1}_{\underline{P}}) \\ ETA'_0 \arrow[u, equal] \arrow[r, "\mu_{A'_0}"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[u, "\hat{E}'"'] \end{tikzcd}$$

Puisque $(E',\breve{E}')$ est compatible avec les unités $(\underline{1}_{\underline{P}}, g, d)$, $(\underline{1}_{\underline{Q}}, g, d)$ de $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ respectivement, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E'A \arrow[r, "E'd_A"] \arrow[d, "d_{E'A}"'] & E'(A \otimes \underline{1}_{\underline{P}}) \\ E'A \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "id \otimes \hat{E}'"] & E'A \otimes E'\underline{1}_{\underline{P}} \arrow[u, "\breve{E}'"'] \end{tikzcd}$$

qui donne l'unicité de $E'd_A$ en vertu de (11) et (12). L'unicité de $E'\lambda_{A'}$ vient du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E'(DTA') \arrow[r, "E'(\lambda_{A'})"] \arrow[d, equal] & E'(1_{\underline{P}}) \\ ETA' \arrow[r, "\mu_{A'}"] & 1_{\underline{Q}} \arrow[u, "\hat{E}'"'] \end{tikzcd}$$

et de la formule (12). D'où l'unicité de $id_{E'A}\otimes E'\lambda_{A'}$ et par conséquent l'unicité de $E'(id_A\otimes\lambda_{A'})$ en vertu de (11) et du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E'(A\otimes TA') \arrow[r, "E'(id_A\otimes\lambda_{A'})"] & E'(A\otimes TA'_0) \\ E'A\otimes E'TA' \arrow[u, "\check{E}'"] \arrow[r, "id\otimes E'\lambda_{A'}"] & E'A\otimes E'TA'_0 \arrow[u, "\check{E}'"'] \end{tikzcd}$$

Enfin soit $[A',B',u] : A \to B$ une flèche de $\underline{P}$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "{[A',B',u]}"'] & A\otimes 1_{\underline{P}} = A\otimes TA'_0 \arrow[r, "id_A\otimes\lambda^{-1}_{A'}"] & A\otimes TA' \arrow[d, "Du"] \\ B \arrow[r, "d_B"] & B\otimes 1_{\underline{P}} = B\otimes TA'_0 \arrow[r, "id_B\otimes\lambda^{-1}_{B'}"] & B\otimes TB' \end{tikzcd}$$

et écrivons, successivement, en nous servant de la remarque 3) où l'on prend les isomorphismes $id : A'\to A'$, $id : A'_0 \to A'_0$

$$d_A = [A'_0\otimes A', A', p_A] = [A'\otimes(A'_0\otimes A'), A'\otimes A', \overset{2}{p}_A]$$

$$id_A\otimes\lambda^{-1}_{A'} = [A', A', id_{A\otimes TA'}]\otimes[A', A'_0, c_{TA'_0, TA'}] = [A'\otimes A', A'\otimes A'_0, w]$$

$$Du = [A'\otimes A'_0, A'\otimes A'_0, u\otimes id_{T(A'\otimes A'_0)}]$$

$$d_B\circ[A', B', u] = [A'_0\otimes B', B', p_B]\circ[A'_0\otimes A', A'_0\otimes B', \overset{2}{u}] =$$

$$= [A'_0\otimes A', B', p_B\circ\overset{2}{u}] = [A'\otimes(A'_0\otimes A'), A'\otimes B', \overbrace{p_B\circ\overset{2}{u}}^{2}]$$

$$id_B\otimes\lambda^{-1}_{B'} = [A', A', id_{B\otimes TA'}]\otimes[B', A'_0, c_{TA'_0, TB'}] = [A'\otimes B', A'\otimes A'_0, w_1]$$

$w$ et $w_1$ étant définis par le diagramme commutatif (9). Il ne nous reste qu'à composer les flèches et nous servir de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12) et de la fonctorialité de $\breve{T}$ et des contraintes d'associativité, de commutativité pour avoir la commutativité du diagramme considéré. Appliquons à ce diagramme le foncteur E', nous obtenons le diagramme commutatif

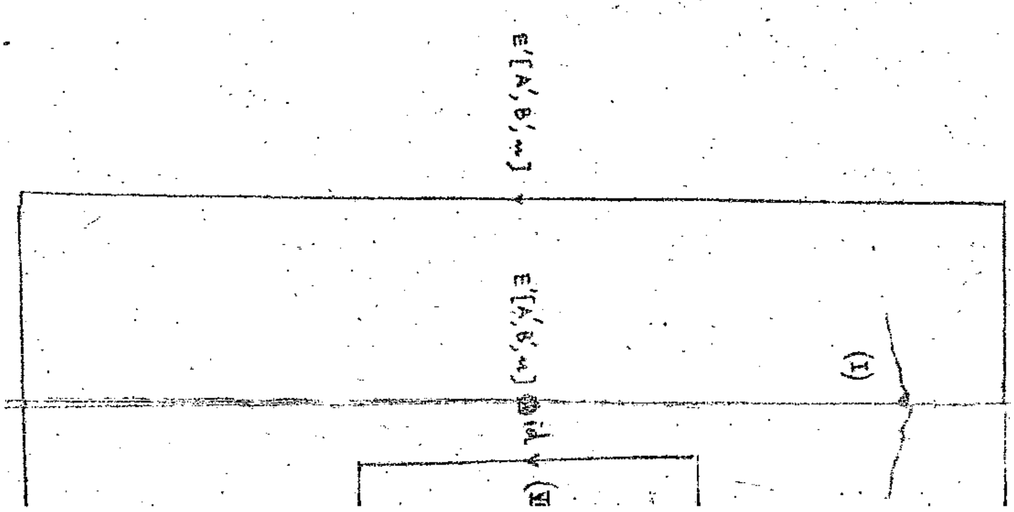
$$\begin{array}{ccccc} E'A & \xrightarrow{E'd_A} & E'(A\otimes TA'_0) & \xrightarrow{E'(id_A\otimes \lambda^{-1}_{A'})} & E'(A\otimes TA') \\ \Big\downarrow{\scriptstyle E'([A',B',u])} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle E'Du\, =\, Eu} \\ E'B & \xrightarrow{E'd_B} & E'(B\otimes TA'_0) & \xrightarrow{E'(id_B\otimes \lambda^{-1}_{B'})} & E'(B\otimes TB') \end{array}$$

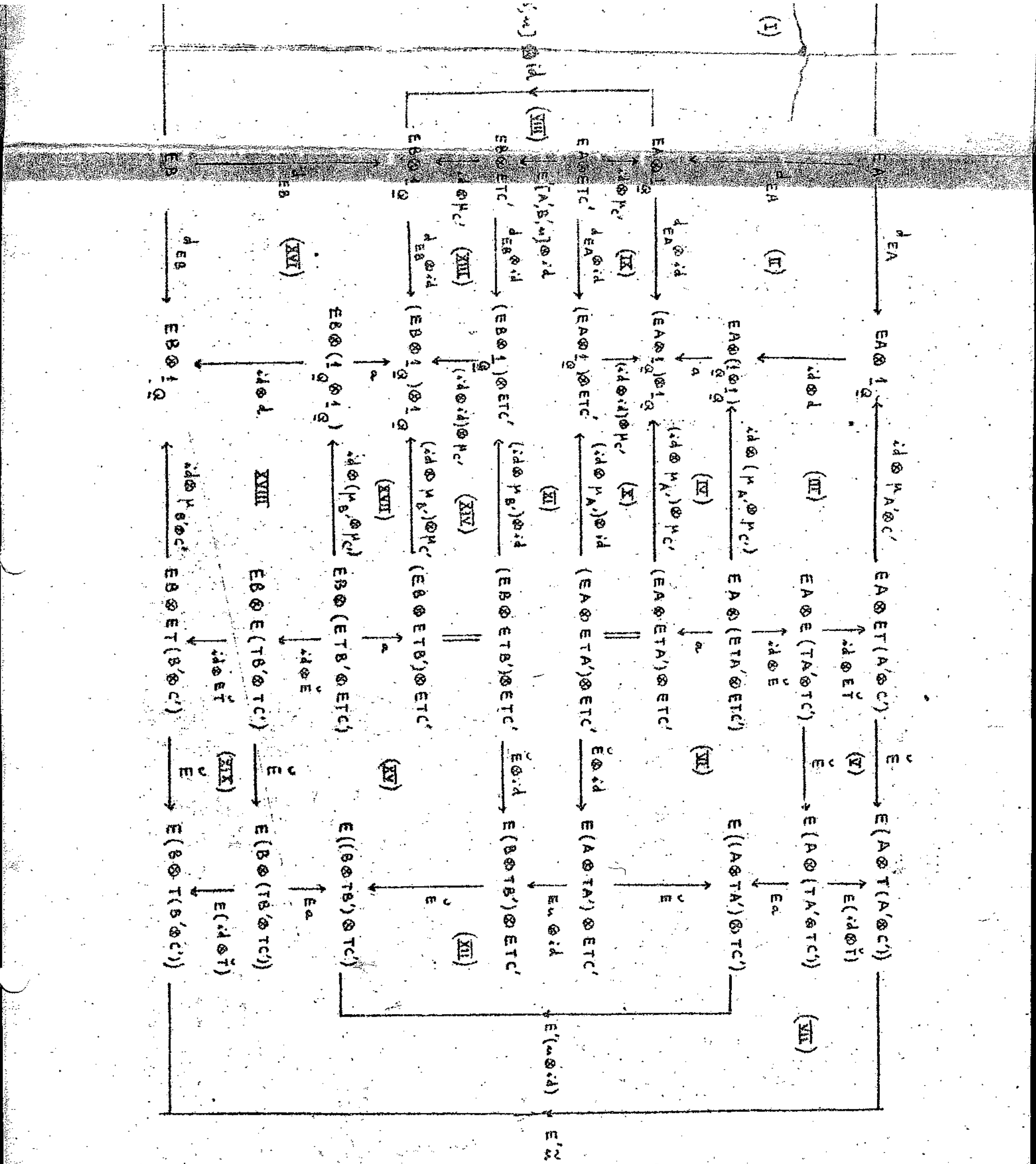
ce qui donne effectivement l'unicité de $E'([A',B',u])$ en vertu de l'unicité de $E'd_A$, $E'd_B$, $E'(id_A\otimes\lambda^{-1}_{A'})$, $E'(id_B\otimes\lambda^{-1}_{B'})$ qu'on vient de démontrer ci-dessus. D'où l'unicité du $\otimes$-foncteur $(E',\breve{E}')$.

2° Existence de $(E',\breve{E}')$. Soient $A, B \in Ob\,\underline{P}$ et $[A',B',u] : A \to B$ une flèche de $\underline{P}$. Définissons $E'A$, $\breve{E}'_{A,B}$ par les formules (11) et $E'[A',B',u]$ par le diagramme commutatif

$$(13)\quad \begin{array}{ccccccc} E'A = EA & \xrightarrow{d_{EA}} & EA\otimes \underline{1}_{\underline{Q}} & \xleftarrow{id\otimes \mu_{A'}} & EA\otimes ETA' & \xrightarrow{\breve{E}} & E(A\otimes TA') \\ \Big\downarrow{\scriptstyle E'[A',B',u]} & & & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle Eu} \\ E'B = EB & \xrightarrow{d_{EB}} & EB\otimes \underline{1}_{\underline{Q}} & \xleftarrow{id\otimes \mu_{B'}} & EB\otimes ETB' & \xrightarrow{\breve{E}} & E(B\otimes TB') \end{array}$$

Prouvons que $E'[A',B',u]$ est indépendant des représentants de la classe $[A',B',u]$. D'abord nous allons montrer que $E'[A',B',u] = E'[A'\otimes C', B'\otimes C', \tilde{u}]$ où C' est un objet quelconque de $\underline{A}'$, $\tilde{u}$ défini dans la remarque 2) avec l'isomorphisme $id : C'_A \to C'$. Pour cela considérons le diagramme suivant





dont la commutativité de la région (I) résulte de la fonctorialité de $d$ ; celle de (II), (XVI) de la compatibilité de la contrainte d'associativité $a$ de $Q$ avec sa contrainte d'unité $(\underline{1}_Q, g, d)$ ; celle de (III), (XVIII) du fait que $\mu$ est un $\otimes$-morphisme ; celle de (IV), (XVII) de la fonctorialité de $a$ ; celle de (V), (XII), (XIX) de la fonctorialité de $\breve{E}$ ; celle de (VI), (XV) de la compatibilité de $(E, \breve{E})$ avec les contraintes d'associativité ; celle de (VII) de la définition de $\tilde{u}$ (Rem. 21) ; celle de (VIII), (IX), (X), (XIII), (XIV) s'obtient en composant les flèches ; celle de (XI) est donnée par le diagramme commutatif (13) ; d'où la commutativité du circuit circuit extérieur qui donne $E'[A', B', u] = E'[A' \otimes C', B' \otimes C', \tilde{u}]$. Ensuite soient $(A', B', u)$, $(A'_1, B'_1, u_1)$ tels que $u' : A' \xrightarrow{\sim} A'_1$, $v' : B' \xrightarrow{\sim} B'_1$ et que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \otimes TA' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "id \otimes Tu'"'] & B \otimes TB' \arrow[d, "id \otimes Tv'"] \\
A \otimes TA'_1 \arrow[r, "u_1"] & B \otimes TB'_1
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. D'après la remarque 1) on a $[A', B', u] = [A'_1, B'_1, u_1]$. Prouvons que $E'[A', B', u] = E'[A'_1, B'_1, u_1]$. Pour cela considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
EA \arrow[r, "d_{EA}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & EA \otimes \underline{1}_Q \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & EA \otimes ETA'_1 \arrow[l, "id \otimes \mu_{A'_1}"'] \arrow[r, "\breve{E}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & E(A \otimes TA'_1) \arrow[dddd, bend left=60, "Eu_1"] \\
EA \arrow[r, "d_{EA}"] \arrow[d, "{E'[A', B', u]}"'] & EA \otimes \underline{1}_Q \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & EA \otimes ETA' \arrow[l, "id \otimes \mu_{A'}"'] \arrow[u, "id \otimes ETu'"] \arrow[r, "\breve{E}"] & E(A \otimes TA') \arrow[u, "E(id \otimes Tu')"'] \arrow[d, "Eu\ (\mathrm{VIII})"] \\
EB \arrow[r, "d_{EB}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & EB \otimes \underline{1}_Q \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & EB \otimes ETB' \arrow[l, "id \otimes \mu_{B'}"'] \arrow[d, "id \otimes ETv'"] \arrow[r, "\breve{E}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & E(B \otimes TB') \arrow[d, "E(id \otimes Tv')"] \\
EB \arrow[r, "d_{EB}"] & EB \otimes \underline{1}_Q & EB \otimes ETB'_1 \arrow[l, "id \otimes \mu_{B'_1}"'] \arrow[r, "\breve{E}"] & E(B \otimes TB'_1)
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (V) est évidente ; celle de (II), (VI) résulte de la fonctorialité de $\mu$ ; celle de (III), (VII) de la fonctorialité de $\breve{E}$ ; celle de (IV) est donnée par le diagramme commutatif (13) ; enfin celle de (VIII) vient de l'hypothèse sur $(A', B', u)$, $(A'_1, B'_1, u_1)$ ; d'où la commutativité du circuit extérieur qui donne l'égalité $E'[A', B', u] = E'[A'_1, B'_1, u_1]$.

Enfin soient $(A', B', u)$, $(A'_1, B'_1, u_1)$ tels qu'il existe des objets $C'$, $C'_1$ et des isomorphismes $u' : A' \otimes C' \xrightarrow{\sim} A'_1 \otimes C'_1$, $v' : B' \otimes C' \xrightarrow{\sim} B'_1 \otimes C'_1$ de $\underline{A}'$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A\otimes T(A'\otimes C') \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, "id\otimes Tu'"'] & B\otimes T(B'\otimes C') \arrow[d, "id\otimes Tv'"] \\ A\otimes T(A'_1\otimes C'_1) \arrow[r, "\tilde{u}_1"] & B\otimes T(B'_1\otimes C'_1) \end{tikzcd}$$

D'après ce que nous venons de démontrer nous avons

$$E'[A',B',u] = E'[A'\otimes C', B'\otimes C', \tilde{u}] = E'[A'_1\otimes C'_1, B'_1\otimes C'_1, \tilde{u}_1] = E'[A'_1, B'_1, u_1]$$

ce qui montre que $E'[A',B',u]$ ne dépend pas effectivement des représentants de la classe $[A',B',u]$. Le diagramme commutatif (13) nous montre qu'en plus

$$E'([B',C',v]\circ[A',B',u]) = E'[B',C',v]\circ E'[A',B',u]$$

$$E'[A',A',id_{A\otimes TA'}] = id_{E'A}$$

ce qui fait que $E'$ est bien un foncteur.

Il nous reste à prouver que $\check{E}'_{A,B} = \check{E}_{A,B}$ est fonctoriel en $A,B$ pour que $(E',\check{E}')$ soit un $\otimes$-foncteur. Pour cela, nous démontrons d'abord la commutativité du diagramme

$$(14)\qquad \begin{tikzcd} EA\otimes EA_1 \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[d, "{E'[A',B',u]\otimes id}"'] & E(A\otimes A_1) \arrow[d, "{E'([A',B',u]\otimes[A'_1,A'_1,id_{A_1\otimes TA'_1}])}"] \\ EB\otimes EA_1 \arrow[r, "\check{E}"] & E(B\otimes A_1) \end{tikzcd}$$

$$(15)\qquad \begin{tikzcd} EB\otimes EA_1 \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[d, "{id\otimes E'[A'_1,B'_1,u_1]}"'] & E(B\otimes A_1) \arrow[d, "{E'([B',B',id]\otimes[A'_1,B'_1,u_1])}"] \\ EB\otimes EB_1 \arrow[r, "\check{E}"] & E(B\otimes B_1) \end{tikzcd}$$

ce qui donnera la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} EA\otimes EA_1 \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[d, "{E'[A',B',u]\otimes E'[A'_1,B'_1,u_1]}"'] & E(A\otimes A_1) \arrow[d, "{E'([A',B',u]\otimes[A'_1,B'_1,u_1])}"] \\ EB\otimes EB_1 \arrow[r, "\check{E}"] & E(B\otimes B_1) \end{tikzcd}$$

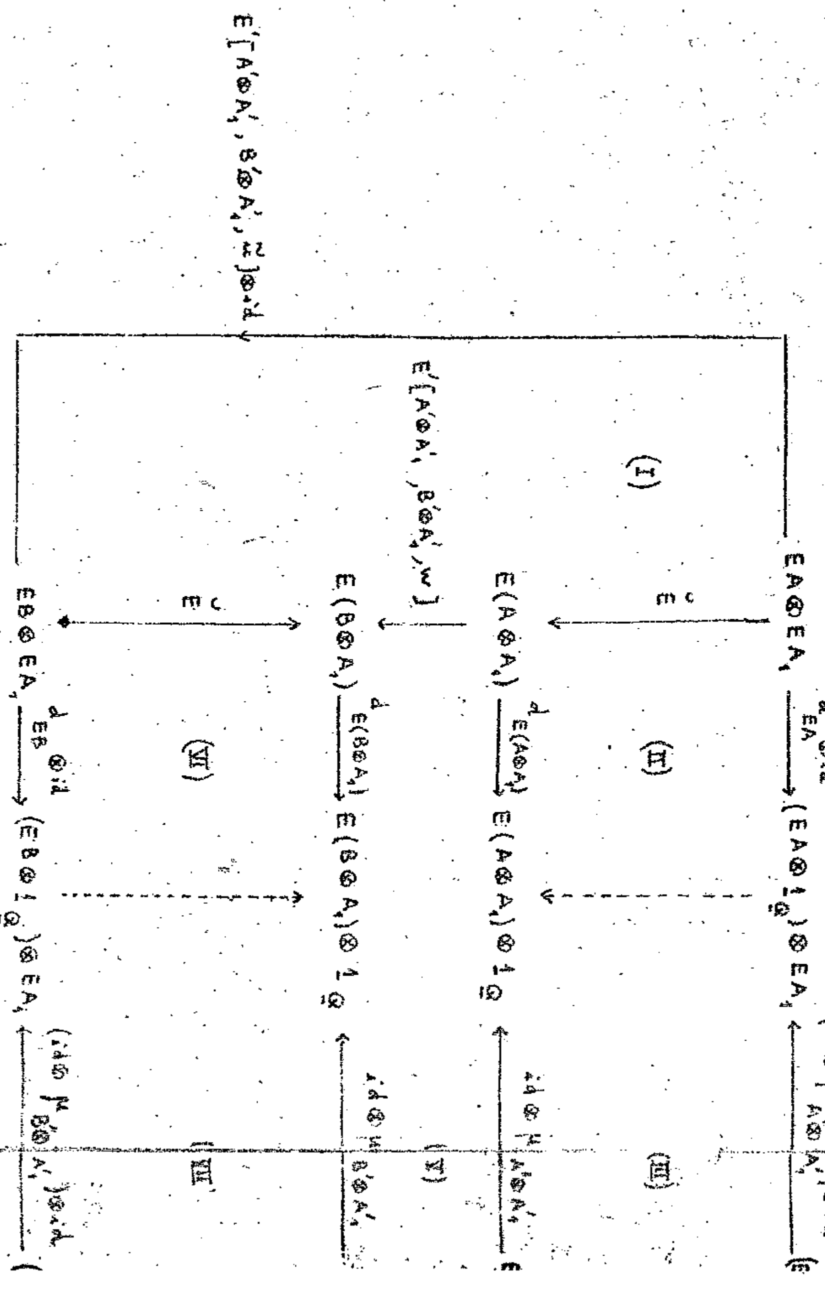
Posons

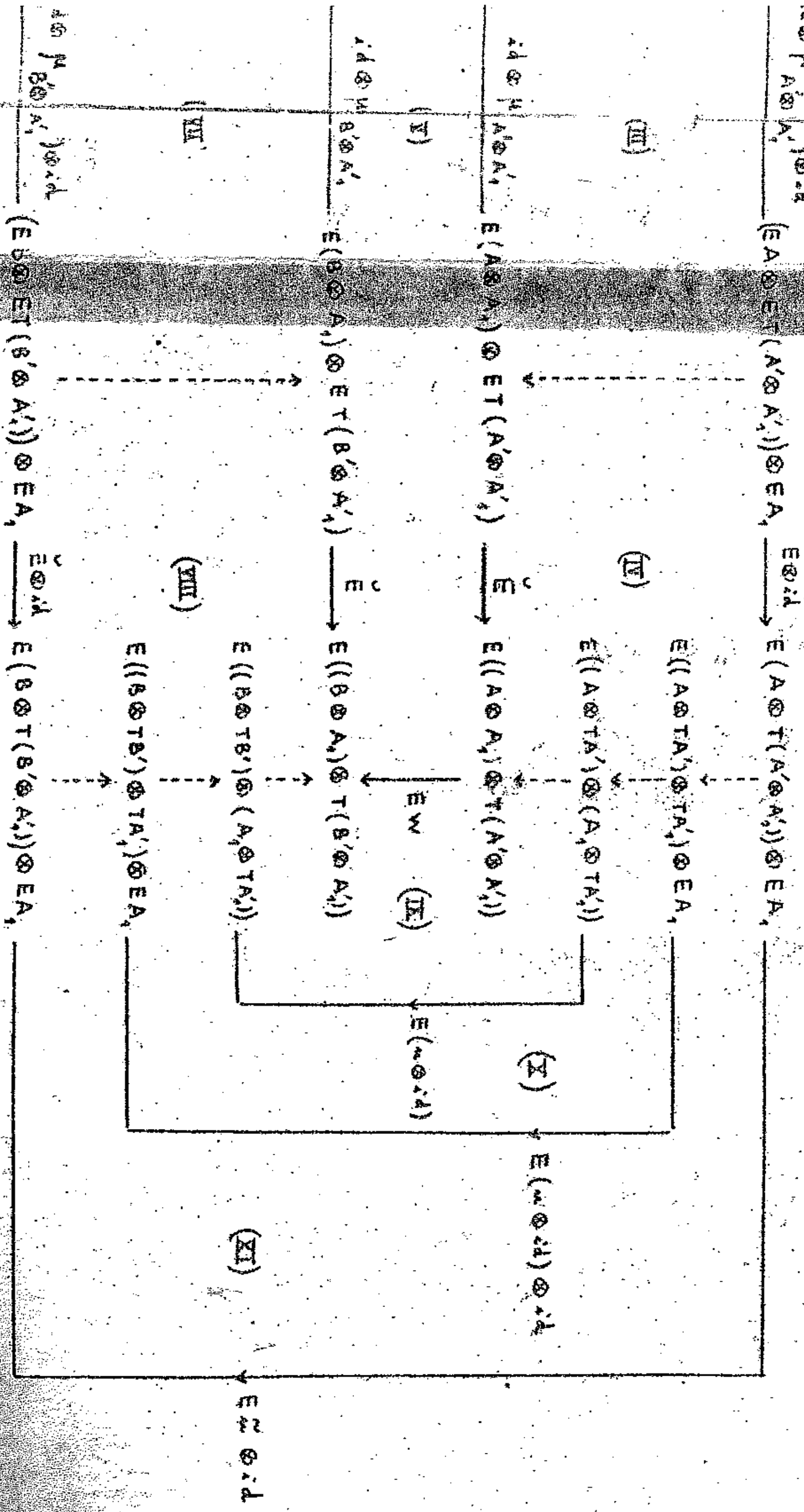
$$E'([A', B', u] \otimes [A'_1, A'_1, id_{A_1 \otimes TA'_1}]) = E'[A' \otimes A'_1, B' \otimes A'_1, w]$$

$w$ étant défini par le diagramme commutatif (9), et soit $\tilde{u}$ la flèche dans $\underline{A}$ défini par le diagramme commutatif (Rem. 2))

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A' \otimes A'_1) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\tilde{u}"'] & (A \otimes TA') \otimes TA'_1 \arrow[d, "u \otimes Tid"] \\
B \otimes T(B' \otimes A'_1) \arrow[r, dashed] & (B \otimes TB') \otimes TA'_1
\end{tikzcd}$$

Considérons le diagramme suivant





La commutativité des régions (II), (IV), (VI), (VIII) résulte de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12) ; celle de (III), (VII), (X) de la fonctorialité de $\check{E}$ et des contraintes d'associativité, de commutativité ; celle de (V) et du circuit extérieur est donnée par la définition de $E'[A',B',u]$ (Diag. (13)) ; celle de (IX) par la définition de $w$ (Diag. (9)) ; enfin celle de (XI) par la définition de $\tilde{u}$. D'où la commutativité de la région (I) qui n'est ~~pas~~ autre que le diagramme (14) en remarquant que $E'[A'\otimes A'_1, B'\otimes A'_1, \tilde{u}] = E'[A', B', u]$. De la même façon on démontre que le diagramme (15) est commutatif, ce qui montre que $\check{E}'_{A,B}$ est fonctoriel en $A, B$. Le couple $(E', \check{E}')$ ainsi défini est bien un $\otimes$-foncteur. Dans le cas où $[A', B', u] = Dv = [A', A', v\otimes id_{TA'}] : A \to B$ le diagramme commutatif (13) est le contour extérieur du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
EA \arrow[r, "d_{EA}"] \arrow[d, "E'Dv"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & EA\otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[d, "Ev\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & EA\otimes ETA' \arrow[l, "id\otimes \mu_{A'}"'] \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[d, "Ev\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & E(A\otimes TA') \arrow[d, "E(v\otimes id)"] \\
EB \arrow[r, "d_{EB}"] & EB\otimes \underline{1}_{\underline{Q}} & EB\otimes ETA' \arrow[l, "id\otimes \mu_{A'}"'] \arrow[r, "\check{E}"] & E(B\otimes TA')
\end{tikzcd}$$

dont les régions (II) et (III) sont manifestement commutatives. D'où la commutativité de la région (I) qui donne, en vertu de la naturalité de $d$, $E'Dv = Ev$. On en conclut, avec la définition de $(D, \check{D})$ (Prop. 16) et de $(E', \check{E}')$ (For. (11)) que $(E, \check{E}) = (E', \check{E}')\circ(D, \check{D})$.

3°. Compatibilité de $(E', \check{E}')$ avec les contraintes. Pour les contraintes d'associativité et de commutativité, il suffit de remarquer que

$$E'[A', A', a_{A,B,C}\otimes id_{TA'}] = E'D(a_{A,B,C}) = E(a_{A,B,C})$$

$$E'[A', A', c_{A,B}\otimes id_{TA'}] = E'D(c_{A,B}) = E(c_{A,B})$$

$$\check{E}'_{A,B} = \check{E}_{A,B}$$

pour avoir aussitôt les compatibilités. Quant à la contrainte d'unité de $\underline{P}$, nous avons pour l'image par $E'$ de son objet unité $\underline{1}_{\underline{P}}$ :

$$E'(\underline{1}_{\underline{P}}) = E'(TA'_0) = E(TA'_0) \xrightarrow[\sim]{\mu_{A'_0}} \underline{1}_{\underline{Q}}$$

D'où $E'(\underline{1}_{\underline{P}})$ est régulier et par suite $(E', \check{E}')$ est compatible avec les unités en vertu de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 8).

4°. Enfin il nous reste à démontrer la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} ETA' \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mu_{A'}"'] & E'DTA' \arrow[d, "E'\lambda_{A'}"] \\ \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "\hat{E}'"] & E'\underline{1}_{\underline{P}} = E'TA'_o \end{tikzcd}$$

En vertu des formules (10) et (12) nous avons

$$\lambda_{A'} = [A'_o, A', c_{TA', TA'_o}]$$

$$\hat{E}' = \mu^{-1}_{A'_o}$$

La démonstration revient donc à démontrer l'égalité

$$E'\lambda_{A'} = E'[A'_o, A', c_{TA', TA'_o}] = \mu^{-1}_{A'_o}\mu_{A'}$$

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} ETA' \arrow[r, "d_{ETA'}"] \arrow[d, "E'\lambda_{A'}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & ETA' \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "\mu_{A'} \otimes id"] \arrow[d, "\mu^{-1}_{A'_o}\mu_{A'} \otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[d, "c = id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & ETA' \otimes ETA'_o \arrow[l, "\mu_{A'} \otimes \mu_{A'_o}"'] \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & E(TA' \otimes TA'_o) \arrow[d, "Ec"] \\ ETA'_o \arrow[r, "d_{ETA'_o}"] & ETA'_o \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "\mu_{A'_o} \otimes id"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} & ETA'_o \otimes ETA' \arrow[l, "\mu_{A'_o} \otimes \mu_{A'}"'] \arrow[r, "\check{E}"] & E(TA'_o \otimes TA') \end{tikzcd}$$

où la commutativité de la région (II) est évidente ; celle de (III) résulte de la fonctorialité de la contrainte de commutativité $c$ de $\underline{Q}$ ; celle de (IV) de la compatibilité de $(E, \check{E})$ avec les contraintes de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{Q}$, enfin celle du circuit extérieur de la définition de $E'[A'_o, A', c] = E'\lambda_{A'}$ (Diag. (13)). D'où la commutativité de (I) qui donne, en vertu de la naturalité de $d$, $E'\lambda_{A'} = \mu^{-1}_{A'_o}\mu_A$. La proposition est ainsi démontrée. Le triple $(\underline{P}, (D, \check{D}), \lambda)$ est donc une solution du problème universel posé.

<u>Remarque 5)</u>.– Dans la remarque 4) nous avons supposé $T(c'_{A',A'}) = id$ pour tout $A' \in Ob\,\underline{A}$ pour simplifier les notations dans la construction du triple $(\underline{P}, (D, \check{D}), \lambda)$. En vérité, c'est le $\otimes$-foncteur AC composé $(\tau, \check{\tau}) = (H, \check{H}) \circ (T, \check{T}) : \underline{A}' \longrightarrow \underline{A}^g$, ~~où $\underline{A}^g$ est la $\otimes$-catégorie AC~~

qui possède la propriété $\mathcal{T}(c'_{A',A'}) = id$, $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ étant la $\otimes$-catégorie AC quotient de $\underline{A}$ définie par la partie multiplicative $\mathcal{S}$ engendrée par l'ensemble des endomorphismes de la forme $T(c'_{A',A'})$ et $(H, \check{H})$ le $\otimes$-foncteur canonique de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ (n° 1, Déf. 2) ; ce qui nous conduit à la définition suivante.

<u>Définition 4</u>.- Soient $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC : $(a, c)$, $A'$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC : $(a', c')$ et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, $(T, \check{T}) : \underline{A}' \longrightarrow \underline{A}$ un $\otimes$-foncteur AC, $\mathcal{S}$ la partie multiplicative engendrée par l'ensemble des endomorphismes de $\underline{A}$ de la forme $T(c'_{A',A'})$, $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ la $\otimes$-catégorie AC quotient de $\underline{A}$ définie par $\mathcal{S}$, et $(H, \check{H})$ le $\otimes$-foncteur canonique de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$. On appelle <u>$\otimes$-catégorie ACU</u> de la $\otimes$-catégorie AC $\underline{A}$ définie par $(\underline{A}', (T, \check{T}))$ la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$ suivante :

1° $\mathrm{Ob}\,\underline{P} = \mathrm{Ob}\,\underline{A}$

2° $\mathrm{Hom}_{\underline{P}}(A, B) = \Phi(A, B)/\mathcal{R}_{A,B} \qquad A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$

$\Phi(A, B)$ étant l'ensemble des triples $(A', B', u)$ où $A', B' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$, $u \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}^{\circ}$, $u : A \otimes TA' \longrightarrow B \otimes TB'$ ; $\mathcal{R}_{A,B}$ la relation <u>binaire</u> définie dans $\Phi(A, B)$ de la façon suivante

$$(A'_1, B'_1, u_1)\ \mathcal{R}_{A,B}\ (A'_2, B'_2, u_2)$$

si et seulement s'il existe des objets $C'_1, C'_2$ de $\underline{A}'$ et des isomorphismes

$$u' : A'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} A'_2 \otimes C'_2 \ , \ v' : B'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} B'_2 \otimes C'_2$$

de $\underline{A}'$ tels que soit commutatif dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ le diagramme suivant (i.e ce diagramme est dans $\underline{A}$ et il est transformé par le foncteur $H$ en un diagramme commutatif dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$).

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] A\otimes T(A'_1\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id\otimes Tu'"'] & (A\otimes TA'_1)\otimes TC'_1 \arrow[r, "u_1\otimes id"] & (B\otimes TB'_1)\otimes TC'_1 \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B'_1\otimes C'_1) \arrow[d, "id\otimes Tv'"] \\ A\otimes T(A'_2\otimes C'_2) \arrow[r, dashed] & (A\otimes TA'_2)\otimes TC'_2 \arrow[r, "u_2\otimes id"] & (B\otimes TB'_2)\otimes TC'_2 \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B'_2\otimes C'_2) \end{tikzcd}$$

3° Composition des flèches dans $\underline{P}$. Soient $[A', B', u] : A \to B$, $[B'', C'', v] : B \to C$.

$$[B'', C'', v] \circ [A', B', u] = [A'\otimes B'', B'\otimes C'', w]$$

$w$ étant défini par le diagramme commutatif (8)

4° $\otimes$-structure sur $\underline{P}$

$$A\otimes B \text{ (dans } \underline{P}) = A\otimes B \text{ (dans } \underline{A})$$

$$[A', B', u]\otimes[E', F', v] = [A'\otimes E', B'\otimes F', W]$$

$W$ étant défini par le diagramme commutatif (9)

5° Contrainte ACU dans $\underline{P}$

$$([A', A', a\otimes id], [A', A', c\otimes id], (TA'_0, [A'_0\otimes A', A', t_A], [A'_0\otimes A', A', p_A]))$$

$t_A$ et $p_A$ étant définis dans la proposition 14.

On appelle <u>$\otimes$-foncteur canonique</u> de $\underline{A}$ dans $\underline{P}$ le $\otimes$-foncteur $AC$ $(D, \check{D})$ :

$$D(A) = A \ , \ D(u) = [A', A', u\otimes id_{TA'}] \ , \ \check{D}_{A,B} = id_{A\otimes B}$$

pour $A, B \in Ob\,\underline{A}$, $u : A \to B$.

On appelle <u>$\otimes$-isomorphisme (~~fonctoriel~~) canonique</u> le $\otimes$-isomorphisme (~~fonctoriel~~)

$$\lambda : (D, \check{D})\circ(T, \check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$$

défini dans la proposition 17.

On voit aussitôt que si $\underline{A}$ est un groupoïde et si pour tout $A \in Ob\,\underline{A}$, il existe $B \in Ob\,\underline{A}$, $A' \in Ob\,\underline{A}'$ tels que $A\otimes B \simeq TA'$, alors $\underline{P}$ est une Pic-catégorie (Chap. II, §2, n°1).

Les hypothèses et les notations restant les mêmes que dans la définition 4, en plus nous notons par $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{P}, \underline{Q})$ la catégorie ayant pour objets les $\otimes$-foncteurs ACU de $\underline{P}$ (Déf. 4) dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{Q}$, pour morphismes les $\otimes$-morphismes unifères (Chap. I, §4, n°2, Déf. 7) ; par $\mathrm{Hom}^{\otimes, AC}(\underline{A}, \underline{Q})$ l'ensemble des $\otimes$-foncteurs AC de $\underline{A}$ dans $\underline{Q}$ ; et par $\underline{\mathscr{C}}$ la catégorie définie de la manière suivante :

$$\mathrm{Ob}\,\underline{\mathscr{C}} = \{((E,\check{E}),\mu) \mid (E,\check{E}) \in \mathrm{Hom}^{\otimes, AC}(\underline{A},\underline{Q}),\ \mu : \otimes\text{-isomorphisme} : (E,\check{E})\circ(T,\check{T}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{I}_{\underline{Q}}\}$$

$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(((E,\check{E}),\mu),((F,\check{F}),\nu))$ = l'ensemble des $\otimes$-morphismes $\varepsilon$ du $\otimes$-foncteur $(E,\check{E})$ dans le $\otimes$-foncteur $(F,\check{F})$ tels que soit commutatif le diagramme

(16)
$$\begin{tikzcd} ET \arrow[r, "\mu", "\sim"'] \arrow[d, "\varepsilon T"'] & \mathrm{I}_{\underline{Q}} \arrow[d, equal] \\ FT \arrow[r, "\nu", "\sim"'] & \mathrm{I}_{\underline{Q}} \end{tikzcd}$$

$(\mathrm{I}_{\underline{Q}}, \check{\mathrm{I}}_{\underline{Q}})$ étant le $\otimes$-foncteur $1_{\underline{Q}}$ constant de $\underline{A}'$ dans $\underline{Q}$ (Déf. 3). Alors nous avons la proposition suivante

<u>Proposition 19</u>. – Les catégories $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{P}, \underline{Q})$ et $\underline{\mathscr{C}}$ sont isomorphes.

<u>Démonstration</u>. – Posons

$$S : \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{P}, \underline{Q}) \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$$

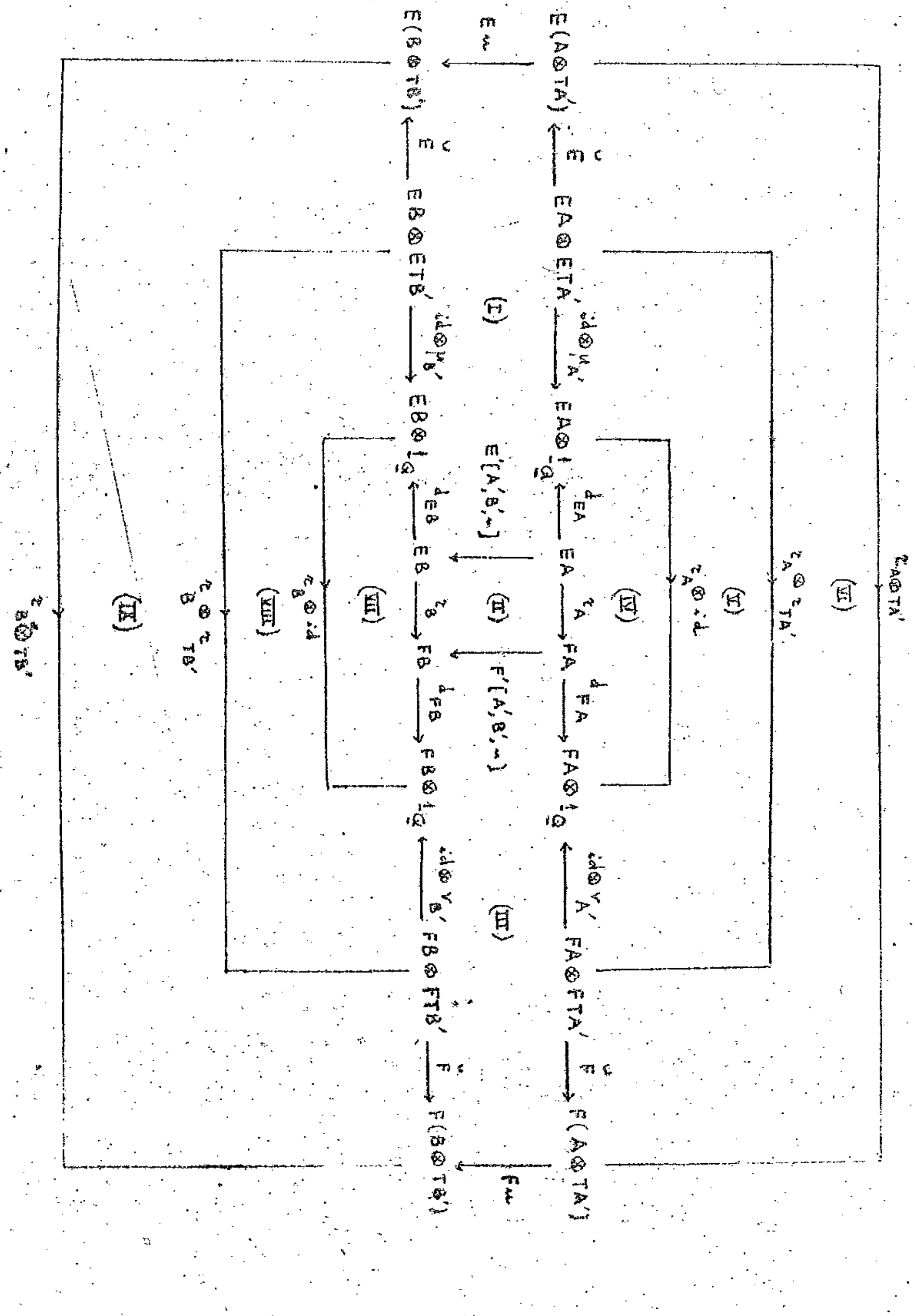
$$\begin{tikzcd} (E',\check{E}') \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & ((E,\check{E}) = (E',\check{E}')\circ(D,\check{D}),\ \mu = \hat{E}'^{-1}\circ E'\lambda) \arrow[d, "\varepsilon = \varepsilon' D"] \\ (F',\check{F}') \arrow[r, mapsto] & ((F,\check{F}) = (F',\check{F}')\circ(D,\check{D}),\ \nu = \hat{F}'^{-1}\circ F'\lambda) \end{tikzcd}$$

En vertu de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 1 et 2) $(E,\check{E}) = (E',\check{E}')\circ(D,\check{D})$ et $(F,\check{F}) = (F',\check{F}')\circ(D,\check{D})$ appartiennent bien à $\mathrm{Hom}^{\otimes, AC}(\underline{A},\underline{Q})$. De plus $\varepsilon = \varepsilon' D$ est un $\otimes$-morphisme (Chap. I, §4, n°1). Ensuite considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
ETA' = E'DTA' \arrow[r, "E'\lambda_{A'}"] \arrow[d, "\tau_{TA'} = \tau'_{DA'}"'] \arrow[rr, bend left=40, "\mu_{A'}"] \arrow[r, phantom, bend left=40, "(\mathrm{I})"] & E'\underline{1}_{\underline{P}} \arrow[d, "\tau'_{\underline{1}_{\underline{P}}}"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{II})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[l, "\hat{E}'"'] \arrow[d, equal] \\
FTA' = F'DTA' \arrow[r, "F'\lambda_{A'}"'] \arrow[rr, bend right=40, "\nu_{A'}"'] \arrow[r, phantom, bend right=40, "(\mathrm{IV})"] & F'\underline{1}_{\underline{P}} & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[l, "\hat{F}'"]
\end{tikzcd}$$

où les régions (I), (IV) sont commutatives par la définition de $\mu$, $\nu$ ; (II) par la naturalité de $\tau'$ ; (III) en vertu du fait que $\tau'$ est unifère ; d'où la commutativité du circuit extérieur qui montre que $\tau$ est effectivement une flèche de $\underline{\mathcal{C}}$. Enfin on vérifie aussitôt que $S(s'\tau') = S(s')S(\tau')$ et $S(id) = id$, par conséquent $S$ est bien un foncteur.

Montrons maintenant que $S$ est un isomorphisme. En vertu de la proposition 18, $S$ est une bijection entre $Ob(\underline{Hom}^{\otimes, ACU}(\underline{P}, \underline{Q}))$ et $Ob\,\underline{\mathcal{C}}$. Il nous reste à prouver que $S$ est aussi une bijection entre $Fl(\underline{Hom}^{\otimes, ACU}(\underline{P}, \underline{Q}))$ et $Fl\,\underline{\mathcal{C}}$. On voit aussitôt que $S$ est une injection en vertu de $\tau_X = \tau'_{DX} = \tau'_X$ pour tout objet $X$ de $\underline{A}$. Donnons-nous une flèche $\tau$ de $\underline{\mathcal{C}}$, i.e un $\otimes$-morphisme de $(E, \check{E})$ dans $(F, \check{F})$ tel qu'on ait la commutativité du diagramme (16) et soient $(E', \check{E}')$, $(F', \check{F}') \in Hom^{\otimes, ACU}(\underline{P}, \underline{Q})$ tels que $(E, \check{E}) = (E', \check{E}') \circ (D, \check{D})$, $(F, \check{F}) = (F', \check{F}') \circ (D, \check{D})$ (Prop. 18). En vertu de la proposition 18 (For. (11)), $E'A = EA$, $F'A = FA$ pour tout $A \in Ob\,\underline{P} = Ob\,\underline{A}$. Posons $\tau'_A = \tau_A$, $A \in Ob\,\underline{P}$, et montrons que $\tau'$ est un $\otimes$-morphisme unifère de $(E', \check{E}')$ dans $(F', \check{F}')$. D'abord considérons le diagramme ci-dessous où les régions (I), (III) sont commutatives par la définition de $E'[A', B', \omega]$, $F'[A', B', \omega]$ (Diag. (13)) ; (VI), (VII) par la fonctorialité de $d$ ; (V), (VIII) en vertu du fait que $\tau$ est une flèche de $\mathcal{C}$ ; (IV), (IX) et le circuit, extérieur puisque $\tau$ est un $\otimes$-morphisme ; d'où la commutativité de la région (II) qui montre que $\tau'_A$ est fonctoriel en $A$.



On vérifie aussitôt que $\tau'$ est un $\otimes$-morphisme puisque $\tau$ en est un et puisque

$$E'A = EA\ ,\ F'A = FA\ ,\ \check{E}'_{A,B} = \check{E}_{A,B}\ ,\ \check{F}'_{A,B} = \check{F}_{A,B}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ (For. (11)). Enfin par la définition de $\tau'$, nous avons

$$\tau'_{\underline{1}_{\underline{P}}} = \tau'_{TA'_0} = \tau_{TA'_0} = \nu^{-1}_{A'_0}\,\mu_{A'_0}\,,$$

la dernière égalité étant le résultat de la commutativité du diagramme (16). On en conclut que $\tau'$ est unifère en appliquant (Chap. I, §4, n° 2, Prop. 4).

## §2. Le problème d'inverser des objets

### 1. Construction de la $\otimes$-catégorie de fractions d'une $\otimes$-catégorie ACU.

Dans tout ce n°, $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU : $(a, c, (\underline{1}, g, d))$, $\underline{C}'$ une $\otimes$ catégorie munie d'une contrainte ACU : $(a', c', (\underline{1}', g', d'))$ et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, $(F, \check{F}) : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ un $\otimes$-foncteur ACU. On se propose de chercher une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$ et un $\otimes$-foncteur ACU $(\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}}) : \underline{C} \longrightarrow \underline{P}$ ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{tikzcd} \underline{Q} & & \\ & \underline{C} \arrow[ul, "\mathcal{E}"'] \arrow[r, "\mathcal{D}"] & \underline{P} \arrow[ull, bend right, "\exists E'"'] \\ & \underline{C}' \arrow[u, "F"] & \end{tikzcd}$$

1° $\mathcal{D}FX'$ est inversible dans $\underline{P}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$.

2° Pour tout $\otimes$-foncteur ACU $(\mathcal{E}, \check{\mathcal{E}})$ de $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{Q}$ tel que $\mathcal{E}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$, il existe un $\otimes$-foncteur ACU $(E', \check{E}')$ unique (à $\otimes$-isomorphisme près) de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ tel que $(\mathcal{E}, \check{\mathcal{E}}) \simeq (E', \check{E}') \circ (\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$.

Pour la construction de la solution du problème, nous avons be-

On vérifie aussitôt que $\tau'$ est un $\otimes$-morphisme puisque $\tau$ en est un et puisque

$$E'A = EA\ ,\ F'A = FA\ ,\ \breve{E}'_{A,B} = \breve{E}_{A,B}\ ,\ \breve{F}'_{A,B} = \breve{F}_{A,B}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ (For. (11)). Enfin par la définition de $\tau'$, nous avons

$$\tau'_{\underline{1}_{\underline{P}}} = \tau'_{TA'_0} = \tau_{TA'_0} = \nu^{-1}_{A'_0}\,\mu_{A'_0}\,.$$

la dernière égalité étant le résultat de la commutativité du diagramme (16). On en conclut que $\tau'$ est unifère en appliquant (Chap. I, §4, n° 2, Prop. 4).

## §2. Le problème d'inversion des objets

### 1. Construction de la $\otimes$-catégorie de fractions d'une $\otimes$-catégorie ACU.

Dans tout ce n°, $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU : $(a, c, (\underline{1}, g, d))$, $\underline{C}'$ une $\otimes$ catégorie munie d'une contrainte ACU : $(a', c', (\underline{1}', g', d'))$ et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, $(F, \breve{F}) : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ un $\otimes$-foncteur ACU. On se propose de chercher une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$ et un $\otimes$-foncteur ACU $(\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}}) : \underline{C} \longrightarrow \underline{P}$ ayant les propriétés suivantes ;

$$\begin{tikzcd} \underline{Q} & \underline{C} \arrow[l, "\mathcal{E}"'] \arrow[r, "\mathcal{D}"] & \underline{P} \arrow[ll, bend right, "E"'] \\ & \underline{C}' \arrow[u, "F"] & \end{tikzcd}$$

1° $\mathcal{D}FX'$ est inversible dans $\underline{P}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$.

2° Pour tout $\otimes$-foncteur ACU $(\mathcal{E}, \breve{\mathcal{E}})$ de $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{Q}$ tel que $\mathcal{E}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$, il existe un $\otimes$-foncteur ACU $(E', \breve{E}')$ unique (à $\otimes$-isomorphisme près) de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ tel que $(\mathcal{E}, \breve{\mathcal{E}}) \simeq (E', \breve{E}') \circ (\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})$.

Pour la construction de la solution du problème, nous avons besoin des Lemmes suivants

<u>Lemme 1</u>.– Les catégories $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q})$ et $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C},\underline{Q})\times\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}',\underline{Q})$ sont équivalentes, $\underline{Q}$ étant une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU : $(a, c, (1_{\underline{Q}}, g, d))$.

<u>Démonstration</u>.– D'abord remarquons que $\underline{C}\times\underline{C}'$ est une $\otimes$-catégorie ACU dont la loi $\otimes$ et les contraintes viennent des $\otimes$-catégories ACU $\underline{C}$ et $\underline{C}'$ de façon naturelle, i.e. nous avons

$$(X,X')\otimes(Y,Y') = (X\otimes Y, X'\otimes Y') \qquad X,Y\in \mathrm{Ob}\,\underline{C},\ X',Y'\in\mathrm{Ob}\,\underline{C}'$$

$$(u,u')\otimes(v,v') = (u\otimes v, u'\otimes v') \qquad u,v\in \mathrm{Fl}\,\underline{C},\ u',v'\in\mathrm{Fl}\,\underline{C}'$$

contrainte d'associativité : $(a, a')$

contrainte de commutativité : $(c, c')$

contrainte d'unité : $((1, 1'), (g, g'), (d, d'))$

ce qui nous permet de parler de la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q})$. Ensuite considérons le $\otimes$-foncteur $(i,\breve{i})$ de $\underline{C}$ dans $\underline{C}\times\underline{C}'$ défini de la manière suivante

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & iX = (X, 1') \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle iu = (u,\, id_{1'})} \\ Y & \longmapsto & iY = (Y, 1') \end{array}$$

$$\breve{i}_{X,Y} = (id_{X\otimes Y}, d'^{-1})$$

On vérifie aussitôt que $(i,\breve{i})$ est un $\otimes$-foncteur ACU. On définit de la même manière le $\otimes$-foncteur $(i',\breve{i}') : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}\times\underline{C}'$.

Cela étant, construisons un foncteur $L$ de la manière suivante

$$L : \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C},\underline{Q})\times\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}',\underline{Q})$$

$$L(E,\breve{E}) = ((Ei, \breve{E}i), (Ei', \breve{E}i')) \quad , (E,\breve{E})\in \mathrm{Hom}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q})$$

$$L(\tau) = (\tau i, \tau i') \quad , \ \tau = \otimes\text{-morphisme unifère} : (E,\breve{E}) \to (F,\breve{F})$$

et un foncteur M comme ci-dessous

$$M : \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{\mathcal{C}}, \underline{\mathcal{Q}}) \times \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{\mathcal{C}}', \underline{\mathcal{Q}}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{\mathcal{C}} \times \underline{\mathcal{C}}', \underline{\mathcal{Q}})$$

$$M((\mathcal{C}, \check{\mathcal{C}}), (\mathcal{C}', \check{\mathcal{C}}')) = (\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}', \widecheck{\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'}) ,$$

$$((\mathcal{C}, \check{\mathcal{C}}), (\mathcal{C}', \check{\mathcal{C}}')) \in \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{\mathcal{C}}, \underline{\mathcal{Q}}) \times \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{\mathcal{C}}', \underline{\mathcal{Q}})$$

$$M(f, f') = f \otimes f', \quad f = \otimes\text{-morphisme unifère} : (\mathcal{C}, \check{\mathcal{C}}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \check{\mathcal{F}})$$

$$f' = \otimes\text{-morphisme unifère} : (\mathcal{C}', \check{\mathcal{C}}') \longrightarrow (\mathcal{F}', \check{\mathcal{F}}')$$

où $(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')(X, X') = \mathcal{C}X \otimes \mathcal{C}'X'$, $(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')(f, f') = \mathcal{C}f \otimes \mathcal{C}'f'$, $(f, f') : (X, X') \to (Y, Y')$

et $\widecheck{\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'}$ défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')(X, X') \otimes (\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')(Y, Y') = (\mathcal{C}X \otimes \mathcal{C}'X') \otimes (\mathcal{C}Y \otimes \mathcal{C}'Y') \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "\widecheck{\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'}"'] & & ((\mathcal{C}X \otimes \mathcal{C}'X') \otimes \mathcal{C}Y) \otimes \mathcal{C}'Y' \\
(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')((X, X') \otimes (Y, Y')) \arrow[ddd, equal] & & (\mathcal{C}X \otimes (\mathcal{C}'X' \otimes \mathcal{C}Y)) \otimes \mathcal{C}'Y' \arrow[u, "a \otimes id"'] \arrow[d, "(id \otimes c) \otimes id"] \\
& & (\mathcal{C}X \otimes (\mathcal{C}Y \otimes \mathcal{C}'X')) \otimes \mathcal{C}'Y' \arrow[dd, "a \otimes id"] \\
& & \\
\mathcal{C}(X \otimes Y) \otimes \mathcal{C}'(X' \otimes Y') & (\mathcal{C}X \otimes \mathcal{C}Y) \otimes (\mathcal{C}'X' \otimes \mathcal{C}'Y') \arrow[l, "\check{\mathcal{C}} \otimes \check{\mathcal{C}}'"'] \arrow[r, "a"] & ((\mathcal{C}X \otimes \mathcal{C}Y) \otimes \mathcal{C}'X') \otimes \mathcal{C}'Y'
\end{tikzcd}$$

$f \otimes f'$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')(X, X') \arrow[r, "(f \otimes f')_{(X, X')}"] \arrow[d, equal] & (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}')(X, X') \arrow[d, equal] \\
\mathcal{C}X \otimes \mathcal{C}'X' \arrow[r, "f_X \otimes f'_{X'}"] & \mathcal{F}X \otimes \mathcal{F}'X'
\end{tikzcd}$$

Prouvons d'abord que L est un foncteur. Les $\otimes$-foncteurs $(Ei, \check{E}i)$, $(Ei', \check{E}i')$ sont compatibles avec les contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité puisque $(E, \check{E})$, $(i, \check{i})$, $(i', \check{i}')$ le sont (Chap. I, §4, n° 2, Prop. 1, 2 et 3).

D'où

$$L(E, \check{E}) = ((Ei, \check{E}i), (Ei', \check{E}i')) \in \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{\mathcal{C}}, \underline{\mathcal{Q}}) \times \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes, ACU}(\underline{\mathcal{C}}', \underline{\mathcal{Q}})$$

On a aussi

$$L(\tau) = (\tau i, \tau i') \in Fl\left(\underline{Hom}^{\otimes, ACU}(\underline{C}, \underline{Q}) \times \underline{Hom}^{\otimes, ACU}(\underline{C}', \underline{Q})\right)$$

puisque d'abord $\tau i$, $\tau i'$ sont des $\otimes$-morphismes (Chap. I, §4, n°1) et ensuite

$$\tau i_{\underline{1}} = \tau_{i\underline{1}} = \tau_{(\underline{1}, \underline{1}')}$$

$$\tau i'_{\underline{1}'} = \tau_{i'\underline{1}'} = \tau_{(\underline{1}, \underline{1}')}$$

ce qui montre que $\tau i_{\underline{1}}$ et $\tau i'_{\underline{1}'}$ sont des isomorphismes ($\tau$ est unifère) et par suite $\tau i$ et $\tau i'$ unifères (Chap. I, §4, n°2, Prop. 4). Enfin la définition de $L(\tau)$ nous donne

$$L(s\tau) = L(s)L(\tau) \quad , \quad L(id) = id$$

Donc $L$ est un foncteur. Montrons maintenant que $M$ est un foncteur. Il est clair que $(F \otimes F', F \breve{\otimes} F')$ est un $\otimes$-foncteur. Sa compatibilité avec les contraintes de commutativité vient de la considération du diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(X\otimes Y)\otimes F'(X'\otimes Y') \arrow[d, "Fc\otimes F'c'"'] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{I})"] & (FX\otimes FY)\otimes(F'X'\otimes F'Y') \arrow[l, "\check{F}\otimes\check{F}'"'] \arrow[d, "c\otimes c"] & (FX\otimes F'X')\otimes(FY\otimes F'Y') \arrow[l, dashed] \arrow[d, "c"] \arrow[ll, bend right, "F\breve{\otimes}F'"'] \\
F(Y\otimes X)\otimes F'(Y'\otimes X') \arrow[r, phantom, "(\mathrm{II})"] & (FY\otimes FX)\otimes(F'Y'\otimes F'X') \arrow[l, "\check{F}\otimes\check{F}'"'] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{III})"] & (FY\otimes F'Y')\otimes(FX\otimes F'X') \arrow[l, dashed] \arrow[ll, bend left, "F\breve{\otimes}F'", "(\mathrm{IV})"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité des régions (I), (IV) résulte de la définition de $F\breve{\otimes}F'$ ; celle de (II) de la compatibilité de $(F, \check{F})$, $(F', \check{F}')$ avec les contraintes de commutativité ; celle de (III) de (Chap. I, §3, n°1, Prop. 7) ; d'où la commutativité du circuit extérieur. Pour la compatibilité de $(F\otimes F', F\breve{\otimes}F')$ avec les contraintes d'associativité, considérons le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
\cdots X,X')\otimes(\gamma\otimes\gamma')((Y,Y')\otimes(Z,Z')) \arrow[d, no head] & & (\gamma\otimes\gamma')(X,X')\otimes((\gamma\otimes\gamma')(Y,Y')\otimes(\gamma\otimes\gamma')(Z,Z')) \arrow[ll, "id\otimes\widetilde{(\gamma\otimes\gamma')}"'] \arrow[d, equal] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{(II)}"] \\
\cdots X')\otimes(\gamma(Y\otimes Z)\otimes\gamma'(Y'\otimes Z')) \arrow[d, dashed] & (\gamma X\otimes\gamma'X')\otimes((\gamma Y\otimes\gamma Z)\otimes(\gamma'Y'\otimes\gamma'Z')) \arrow[l, "(id\otimes id)\otimes(\check{\gamma}\otimes\check{\gamma}')"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & (\gamma X\otimes\gamma'X')\otimes((\gamma Y\otimes\gamma'Y')\otimes(\gamma Z\otimes\gamma'Z')) \arrow[l, dashed] \arrow[d, equal] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{(X)}"] \\
\cdots(Y\otimes Z))\otimes(\gamma'X'\otimes\gamma'(Y'\otimes Z')) & (\gamma X\otimes(\gamma Y\otimes\gamma Z))\otimes(\gamma'X'\otimes(\gamma'Y'\otimes\gamma'Z')) \arrow[l, "(id\otimes\check{\gamma})\otimes(id\otimes\check{\gamma}')"'] \arrow[d, "a\otimes a"] & (\gamma X\otimes\gamma'X')\otimes((\gamma Y\otimes\gamma'Y')\otimes(\gamma Z\otimes\gamma'Z')) \arrow[l, dashed] \arrow[d, "a"] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{(VIII)}"] \\
\cdots\otimes\gamma Z)\otimes(\gamma'(X'\otimes Y')\otimes\gamma'Z') \arrow[d, dashed] & ((\gamma X\otimes\gamma Y)\otimes\gamma Z)\otimes((\gamma'X'\otimes\gamma'Y')\otimes\gamma'Z') \arrow[l, "(\check{\gamma}\otimes id)\otimes(\check{\gamma}'\otimes id)"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{(IX)}"] & ((\gamma X\otimes\gamma'X')\otimes(\gamma Y\otimes\gamma'Y'))\otimes(\gamma Z\otimes\gamma'Z') \arrow[l, dashed] \arrow[d, equal] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{(X)}"] \\
\cdots)\otimes\gamma'(X'\otimes Y'))\otimes(\gamma Z\otimes\gamma'Z') \arrow[d, equal] & ((\gamma X\otimes\gamma Y)\otimes(\gamma'X'\otimes\gamma'Y'))\otimes(\gamma Z\otimes\gamma'Z') \arrow[l, "(\check{\gamma}\otimes\check{\gamma}')\otimes(id\otimes id)"'] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{(XII)}"] & ((\gamma X\otimes\gamma'X')\otimes(\gamma Y\otimes\gamma'Y'))\otimes(\gamma Z\otimes\gamma'Z') \arrow[l, dashed] \arrow[d, equal] \\
\cdots(X,X')\otimes(Y,Y'))\otimes(\gamma\otimes\gamma')(Z,Z') & & ((\gamma\otimes\gamma')(X,X')\otimes(\gamma\otimes\gamma')(Y,Y'))\otimes(\gamma\otimes\gamma')(Z,Z') \arrow[ll, "\widetilde{(\gamma\otimes\gamma')}\otimes id"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
(\varphi\otimes\varphi')((X,X')\otimes((Y,Y')\otimes(Z,Z'))) \arrow[d, equal] & & (\varphi\otimes\varphi')(X,X')\otimes(\varphi\otimes\varphi')((Y,Y')\otimes(Z,Z')) \arrow[ll, "\widetilde{\varphi\otimes\varphi'}"'] \arrow[d, equal] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{I})"] \\
\varphi(X\otimes(Y\otimes Z))\otimes\varphi'(X'\otimes(Y'\otimes Z')) \arrow[d, equal] & (\varphi X\otimes\varphi(Y\otimes Z))\otimes(\varphi'X'\otimes\varphi'(Y'\otimes Z')) \arrow[l, "\check\varphi\otimes\check\varphi'"'] \arrow[r, dashed] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\varphi X\otimes\varphi'X')\otimes(\varphi(Y\otimes Z)\otimes\varphi'(Y'\otimes Z')) \arrow[d, dashed] \\
\varphi(X\otimes(Y\otimes Z))\otimes\varphi'(X'\otimes(Y'\otimes Z')) \arrow[d, "\varphi a\otimes\varphi' a'"'] & & (\varphi X\otimes\varphi(Y\otimes Z))\otimes(\varphi'X'\otimes\varphi'(Y'\otimes Z')) \arrow[ll, "\check\varphi\otimes\check\varphi'"'] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{V})"] \\
\varphi((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes\varphi'((X'\otimes Y')\otimes Z') \arrow[d, equal] & & (\varphi(X\otimes Y)\otimes\varphi Z)\otimes(\varphi'(X'\otimes Y')\otimes\varphi'Z') \arrow[ll, "\check\varphi\otimes\check\varphi'"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{VIII})"] \\
\varphi((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes\varphi'((X'\otimes Y')\otimes Z') \arrow[d, equal] & (\varphi(X\otimes Y)\otimes\varphi Z)\otimes(\varphi'(X'\otimes Y')\otimes\varphi'Z') \arrow[l, "\check\varphi\otimes\check\varphi'"'] \arrow[r, dashed] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XI})"] & (\varphi(X\otimes Y)\otimes\varphi'(X'\otimes Y'))\otimes(\varphi Z\otimes\varphi'Z') \arrow[d, equal] \\
(\varphi\otimes\varphi')(((X,X')\otimes(Y,Y'))\otimes(Z,Z')) & & (\varphi\otimes\varphi')((X,X')\otimes(Y,Y'))\otimes(\varphi\otimes\varphi')(Z,Z') \arrow[ll, "\widetilde{\varphi\otimes\varphi'}"']
\end{tikzcd}
$$

où les régions (I), (II), (XI), (XII) sont commutatives par la définition de $\widecheck{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'}$; (III), (VIII) par évidence ; (IV), (IX) par la naturalité de a et c ; (V), (VII), (X) par (Chap. I, §3, n°1, Prop. 7) ; enfin (VI) par la compatibilité de $(\mathcal{C},\check{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{C}',\check{\mathcal{C}}')$ avec les contraintes d'associativité. On en déduit la commutativité du circuit extérieur qui montre que $(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}', \widecheck{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'})$ est compatible avec les contraintes d'associativité. Enfin $(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}', \widecheck{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'})$ est compatible avec les contraintes d'unité en remarquant que

$$(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}')(\underline{1},\underline{1}') = \mathcal{C}\underline{1}\otimes\mathcal{C}'\underline{1}' \xrightarrow[\sim]{\hat{\mathcal{C}}\otimes\hat{\mathcal{C}}'} \underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} \overset{d}{\simeq} \underline{1}_{\underline{Q}}$$

i.e $(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}')(\underline{1},\underline{1}')$ est régulier, et en appliquant (Chap. I, §4, n°2, Prop. 8).
Tout cela nous permet de conclure que

$$M((\mathcal{C},\check{\mathcal{C}}),(\mathcal{C}',\check{\mathcal{C}}')) = (\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}', \widecheck{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'}) \in \mathrm{Hom}^{\otimes,ACU}(\underline{C}\times\underline{C}', \underline{Q})$$

Il est immédiat que $M(\rho,\rho') = \rho\otimes\rho'$ est un $\otimes$-morphisme unifère quand $\rho,\rho'$ le sont, et

$$M(\tau\rho,\ \tau'\rho') = M(\tau,\tau')\,M(\rho,\rho')$$
$$M(id, id) = id$$

Par conséquent M est un foncteur.

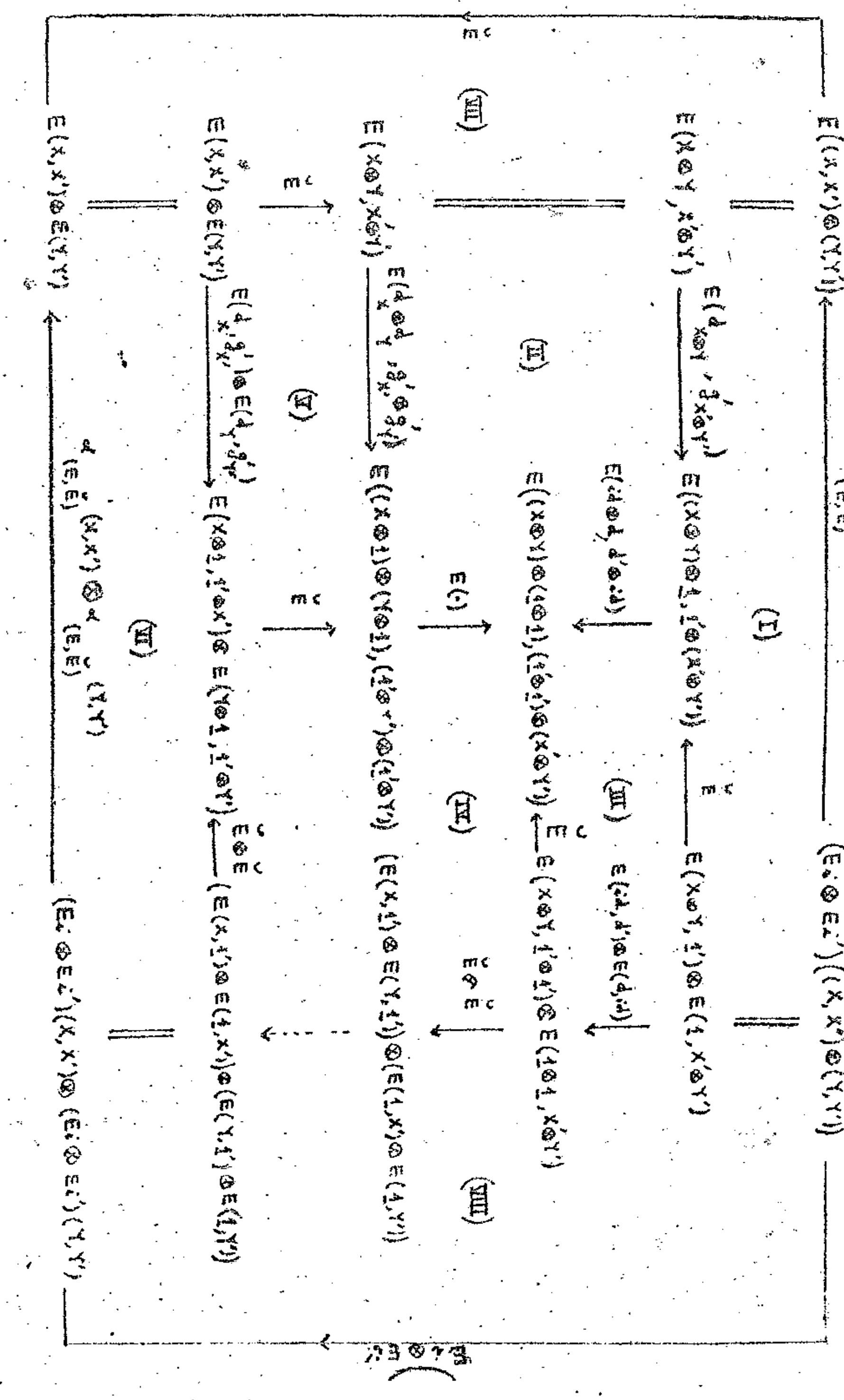
En vertu de la définition des foncteurs L, M nous avons

$$ML(E,\check{E}) = (Ei\otimes Ei',\ \widecheck{Ei\otimes Ei'})$$

Pour tout couple $(X,X')\in Ob(\underline{C}\times\underline{C}')$, définissons $\alpha_{(E,\check{E})}(X,X')$ par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
ML(E,\check{E})(X,X') & & \xrightarrow{\alpha_{(E,\check{E})}(X,X')} & & (E,\check{E})(X,X') \\
\| & & & & \| \\
E(X,\underline{1}')\otimes E(\underline{1},X') & \xrightarrow{\check{E}} & E(X\otimes\underline{1},\underline{1}'\otimes X') & \xleftarrow{E(d_X,g'_{X'})} & E(X,X')
\end{array}$$

Il est clair que $\alpha_{(E,\check{E})}(X, X')$ est un isomorphisme pour tout couple $(X, X')$ comme étant le composé de deux isomorphismes. Prouvons que $\alpha_{(E,\check{E})}$ est un $\otimes$-morphisme unifère. $\alpha_{(E,\check{E})}(X, X')$ est bien fonctoriel en $X, X'$ comme étant le composé ~~de~~ deux flèches qui sont fonctorielles en $X, X'$. Ensuite considérons le diagramme



où la flèche $E(\cdot)$ est définie par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E((X\otimes \underline{1})\otimes(Y\otimes\underline{1}),(\underline{1}'\otimes X')\otimes(\underline{1}'\otimes Y')) \arrow[r, "E(a,a')"] \arrow[d, "E(\cdot)"'] & E(((X\otimes\underline{1})\otimes Y)\otimes\underline{1},((\underline{1}'\otimes X')\otimes\underline{1}')\otimes Y') \\
E((X\otimes Y)\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1}),(\underline{1}'\otimes\underline{1}')\otimes(X'\otimes Y')) \arrow[d, "E(a,a')"'] & E((X\otimes(\underline{1}\otimes Y))\otimes\underline{1},(\underline{1}'\otimes(X'\otimes\underline{1}'))\otimes Y') \arrow[u, "E(a\otimes id,\, a'\otimes id)"'] \arrow[d, "E((id\otimes c)\otimes id,\, (id\otimes c')\otimes id)"] \\
E(((X\otimes Y)\otimes\underline{1})\otimes\underline{1},((\underline{1}'\otimes\underline{1}')\otimes X')\otimes Y') & E((X\otimes(Y\otimes\underline{1}))\otimes\underline{1},(\underline{1}'\otimes(\underline{1}'\otimes X'))\otimes Y') \arrow[l, "E(a\otimes id,\, a'\otimes id)"']
\end{tikzcd}$$

i.e la flèche $\cdot$ est le composé des flèches construites à l'aide des contraintes d'associativité $(a,a')$, de commutativité $(c,c')$, des identités et de la loi $\otimes$ dans $\underline{C}\times\underline{C}'$.

Les régions (I), (VI) du diagramme considéré sont commutatives par la définition de $\alpha_{(E,\check{E})}$ ; (II) par (Chap. I, §3, n°4, Prop. 28) ; (III), (V) par la naturalité de $\check{E}$ ; (IV) par (Chap. I, §4, n°2, Prop. 11) ; (VII) par évidence ; (VIII) par la définition de $\check{E_i\otimes E_{i'}}$. On en déduit la commutativité du circuit extérieur qui exprime que $\alpha_{(E,\check{E})}$ est un $\otimes$-morphisme. Le fait que $\alpha_{(E,\check{E})}$ est unifère résulte de (Chap. I, §4, n°2, Cor. de la Prop. 4). De plus, $\alpha_{(E,\check{E})}$ est fonctoriel en $(E,\check{E})$, i.e pour tout $\otimes$-morphisme unifère $u : (E,\check{E}) \to (F,\check{F})$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(E_i\otimes E_{i'},\ \check{E_i\otimes E_{i'}}) \arrow[r, "\alpha_{(E,\check{E})}"] \arrow[d, "u_i\otimes u_{i'}"'] & (E,\check{E}) \arrow[d, "u"] \\
(F_i\otimes F_{i'},\ \check{F_i\otimes F_{i'}}) \arrow[r, "\alpha_{(F,\check{F})}"] & (F,\check{F})
\end{tikzcd}$$

est commutatif. En effet, considérons le diagramme ci-dessous dont les régions (I), (IV) sont commutatives par la définition de $\alpha_{(E,\check{E})}(X,X')$, $\alpha_{(F,\check{F})}(X,X')$; (II), (III) en vertu du fait que $u$ est un $\otimes$-morphisme.

$$\begin{tikzcd}
E(X,\underline{1}')\otimes E(\underline{1},X') \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[d, "\tau_{(X,\underline{1}')}\otimes\tau_{(\underline{1},X')}"'] \arrow[rr, bend left=40, "\alpha_{(E,\check{E})}(X,X')"] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "(\mathrm{I})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & E(X\otimes\underline{1},\underline{1}'\otimes X') \arrow[d, "\tau_{(X\otimes\underline{1},\underline{1}'\otimes X')}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & E(X,X') \arrow[l, "E(d_X,g'_{X'})"'] \arrow[d, "\tau_{(X,X')}"] \\
F(X,\underline{1}')\otimes F(\underline{1},X') \arrow[r, "\check{F}"] \arrow[rr, bend right=40, "\alpha_{(F,\check{F})}(X,X')"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "(\mathrm{IV})"] & F(X\otimes\underline{1},\underline{1}'\otimes X') & F(X,X') \arrow[l, "F(d_X,g'_{X'})"']
\end{tikzcd}$$

Par conséquent on obtient la commutativité du circuit extérieur. Nous avons ainsi trouvé un isomorphisme de foncteurs

$$\alpha : ML \xrightarrow{\sim} id_{\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,ACU}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q})}$$

Toujours partant de la définition des foncteurs $L, M$, nous obtenons

$$LM((\mathcal{F},\check{\mathcal{F}}),(\mathcal{F}',\check{\mathcal{F}}')) = (((\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')i, \widetilde{(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')}\check{i}), ((\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')i', \widetilde{(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')}\check{i}'))$$

Pour tout $X \in Ob\,\underline{C}$, définissons $\beta_{((\mathcal{F},\check{\mathcal{F}}),(\mathcal{F}',\check{\mathcal{F}}'))}(X)$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')i(X) \arrow[rr, "\beta_{((\mathcal{F},\check{\mathcal{F}}),(\mathcal{F}',\check{\mathcal{F}}'))}(X)"] \arrow[d, equal] & & \mathcal{F}X \arrow[d, "d_{\mathcal{F}X}"] \\
(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')(X,\underline{1}') = \mathcal{F}X\otimes\mathcal{F}'\underline{1}' & & \mathcal{F}X\otimes 1_{\underline{Q}} \arrow[ll, "id\otimes\hat{\mathcal{F}}'"']
\end{tikzcd}$$

$\hat{\mathcal{F}}'$ étant l'isomorphisme venant de la compatibilité de $(\mathcal{F}',\check{\mathcal{F}}')$ avec les unités. Il est clair que $\beta_{((\mathcal{F},\check{\mathcal{F}}),(\mathcal{F}',\check{\mathcal{F}}'))}(X)$ est un isomorphisme pour tout $X \in Ob\,\underline{C}$. Prouvons que $\beta_{((\mathcal{F},\check{\mathcal{F}}),(\mathcal{F}',\check{\mathcal{F}}'))}$ est un $\otimes$-morphisme unifère. D'abord ~~on~~ voit aussitôt que $\beta_{((\mathcal{F},\check{\mathcal{F}}),(\mathcal{F}',\check{\mathcal{F}}'))}(X)$ est fonctoriel en $X$. Pour montrer que $\beta_{((\mathcal{C},\breve{\mathcal{C}}),(\mathcal{C}',\breve{\mathcal{C}}'))}$ est un $\otimes$-morphisme nous considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}X \otimes \mathcal{C}Y \arrow[rrr, "\breve{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "d \otimes d"] & & & \mathcal{C}(X \otimes Y) \arrow[d, "d"] \\
(\mathcal{C}X \otimes 1_{\underline{Q}}) \otimes (\mathcal{C}Y \otimes 1_{\underline{Q}}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "(id \otimes \hat{\mathcal{C}}') \otimes (id \otimes \hat{\mathcal{C}}')"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\mathcal{C}X \otimes \mathcal{C}Y) \otimes (1_{\underline{Q}} \otimes 1_{\underline{Q}}) \arrow[rr, "\breve{\mathcal{C}} \otimes d"] \arrow[d, "(id \otimes id) \otimes (\hat{\mathcal{C}}' \otimes \hat{\mathcal{C}}')"] \arrow[u, phantom, "(\mathrm{I})"] & & \mathcal{C}(X \otimes Y) \otimes 1_{\underline{Q}} \arrow[d, "id \otimes \hat{\mathcal{C}}'"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{III})"] \\
(\mathcal{C}X \otimes \mathcal{C}'1') \otimes (\mathcal{C}Y \otimes \mathcal{C}'1') \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & (\mathcal{C}X \otimes \mathcal{C}Y) \otimes (\mathcal{C}'1' \otimes \mathcal{C}'1') \arrow[r, "\breve{\mathcal{C}} \otimes \breve{\mathcal{C}}'"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \mathcal{C}(X \otimes Y) \otimes \mathcal{C}'(1' \otimes 1') \arrow[r, "id \otimes \mathcal{C}'d'"] & \mathcal{C}(X \otimes Y) \otimes \mathcal{C}'1' \arrow[d, equal] \\
(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')i(X) \otimes (\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')i(Y) \arrow[rrr, "\widetilde{(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')i}"] & & & (\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')i(X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

dans lequel les régions (I), (III) sont commutatives en vertu de (Chap. I, §4, n° 2, Prop. 11) ; (II) en vertu de la fonctorialité des contraintes d'associativité et de commutativité ; (IV) en vertu de la définition de $\widetilde{(\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}')i}$. On en conclut la commutativité du circuit extérieur, ce qui prouve que $\beta_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}$ est un $\otimes$-morphisme. $\beta$ est en plus un isomorphisme, ce qui implique $\beta_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}$ unifère (Chap. I, §4, n°2, Cor. de la Prop. 4). Le fait que $\beta_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}$ est fonctoriel en $((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))$, i.e pour tout $\otimes$-morphisme unifère $f:(\mathcal{G},\check{\mathcal{G}})\to(\mathcal{F},\check{\mathcal{F}})$ et tout $\otimes$-morphisme unifère $f':(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}')\to(\mathcal{F}',\check{\mathcal{F}}')$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
((\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}')i,\ \widetilde{(\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}')i}) \arrow[r, "\beta_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}"] \arrow[d, "(f\otimes f')i"'] & (\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}) \arrow[d, "f"] \\
((\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')i,\ \widetilde{(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')i}) \arrow[r, "\beta_{((\mathcal{F},\check{\mathcal{F}}),(\mathcal{F}',\check{\mathcal{F}}'))}"] & (\mathcal{F},\check{\mathcal{F}})
\end{tikzcd}$$

est commutatif, résulte de la considération du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}X \arrow[r, "d_{\mathcal{G}X}"] \arrow[d, "f_X"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \mathcal{G}X\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "id\otimes\check{\mathcal{G}}'"] \arrow[d, "f_X\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \mathcal{G}X\otimes\mathcal{G}'\underline{1}' \arrow[d, "f_X\otimes f'_{\underline{1}'}"] \\
\mathcal{F}X \arrow[r, "d_{\mathcal{F}X}"] & \mathcal{F}X\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "id\otimes\hat{\mathcal{F}}'"] & \mathcal{F}X\otimes\mathcal{F}'\underline{1}'
\end{tikzcd}$$

dont la région (I) est commutative en vertu de la naturalité de $d$ ; la région (II) du fait que $f'$ est unifère. D'où la commutativité du circuit extérieur.

De la même manière, nous définissons $\beta'_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}')i'X' \arrow[r, "\beta'_{((\mathcal{G},\check{\mathcal{G}}),(\mathcal{G}',\check{\mathcal{G}}'))}(X')"] \arrow[d, equal] & \mathcal{G}'X' \arrow[d, "g_{\mathcal{G}'X'}"] \\
(\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}')(\underline{1},X') = \mathcal{G}\underline{1}\otimes\mathcal{G}'X' & \underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\mathcal{G}'X' \arrow[l, "\check{\mathcal{G}}\otimes id"']
\end{tikzcd} \qquad X'\in Ob\,\underline{C}'$$

et nous démontrons que $\beta'_{((\mathscr{E},\check{\mathscr{E}}),(\mathscr{E}',\check{\mathscr{E}}'))}(X')$ est un $\otimes$-isomorphisme, et $\beta'_{((\mathscr{E},\check{\mathscr{E}}),(\mathscr{E}',\check{\mathscr{E}}'))}$ est fonctoriel en $(\mathscr{E},\check{\mathscr{E}}), (\mathscr{E}',\check{\mathscr{E}}')$. Ces démonstrations faites (elles sont analogues à celles de $\beta$), nous pouvons écrire

$$(\beta;\beta') : LM \xrightarrow{\sim} id_{\underline{Hom}^{\otimes,ACU}(\underline{C},\underline{Q})\times \underline{Hom}^{\otimes,ACU}(\underline{C}',\underline{Q})}$$

Donc les foncteurs $L, M$ sont des équivalences qu'on appelle les <u>équivalences canoniques</u> entre $\underline{Hom}^{\otimes,ACU}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q})$ et $\underline{Hom}^{\otimes,ACU}(\underline{C},\underline{Q})\times\underline{Hom}^{\otimes,ACU}(\underline{C}',\underline{Q})$. Le lemme 1 est ainsi démontré.

<u>Lemme 2</u>.– Soient $\underline{Q}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU : $(a, c, (1_{\underline{Q}}, g, d))$ et $(\mathscr{E},\check{\mathscr{E}})$ un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{Q}$, tel que $\mathscr{E}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X' \in Ob\,\underline{C}'$. Alors il existe un $\otimes$-foncteur ACU $(\eta,\check{\eta}) : \underline{C}' \to \underline{Q}$ et un isomorphisme de foncteurs $\mu$ tels que

(1) $$\mu_{X'} : \mathscr{E}FX' \otimes \eta X' \xrightarrow{\sim} 1_{\underline{Q}}$$

pour tout $X' \in Ob\,\underline{C}'$.

<u>Démonstration</u>.– Puisque $\mathscr{E}FX'$ est inversible dans $\underline{Q}$, il existe un objet et un isomorphisme notés respectivement par $\eta X'$ et $\mu_{X'}$ dans $\underline{Q}$ tels qu'on ait la relation (1). Pour tout $X' \in Ob\,\underline{C}'$ choisissons $\eta X'$, $\mu X'$ vérifiant (1). Soit $u' : X' \xrightarrow{\sim} Y'$ une flèche de $\underline{C}'$ (rappelons-nous que la catégorie sous-jacente de $\underline{C}'$ est un groupoïde), alors il existe une flèche et une seule notée $\eta u'$, $\eta u' : \eta X' \to \eta Y'$ (Chap. I, §3, n°5, Prop. 35) rendant commutatif le diagramme

(2)
$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}FX' \otimes \eta X' \arrow[r, "\mu_{X'}"] \arrow[dr, "\mathscr{E}Fu' \otimes id"'] & 1_{\underline{Q}} & \mathscr{E}FY' \otimes \eta Y' \arrow[l] \\
& \mathscr{E}FY' \otimes \eta X' \arrow[ur, "id \otimes \eta u'"'] &
\end{tikzcd}$$

De plus nous définissons pour tout couple $(X', Y')$, $X', Y' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$, l'isomorphisme

$$\breve{\eta}_{X',Y'} : \eta X' \otimes \eta Y' \xrightarrow{\sim} \eta(X' \otimes Y')$$

par le diagramme commutatif

$$(3) \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{C}F(X'\otimes Y')\otimes \eta(X'\otimes Y') \arrow[rr, "\mu_{X'\otimes Y'}"] & & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "d"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \\ \mathscr{C}F(X'\otimes Y')\otimes(\eta X'\otimes \eta Y') \arrow[u, "id \otimes \breve{\eta}"] & (\mathscr{C}FX'\otimes \mathscr{C}FY')\otimes(\eta X'\otimes \eta Y') \arrow[l, "\breve{\mathscr{C}F}\otimes id"'] \arrow[rr, dashed] & & (\mathscr{C}FX'\otimes \eta X')\otimes(\mathscr{C}FY'\otimes \eta Y') \arrow[u, "\mu_{X'}\otimes \mu_{Y'}"'] \end{tikzcd}$$

ce qu'on peut toujours réaliser puisque $\mathscr{C}F(X'\otimes Y')$ est inversible, donc régulier.

Nous allons montrer que $(\eta, \breve{\eta}) : \underline{C}' \longrightarrow \underline{Q}$ est un $\otimes$-foncteur ACU et $\mu$ un isomorphisme de foncteurs. D'abord $\eta$ est un foncteur en vertu de (Chap. I, § 3, n° 5, Prop. 35). Pour démontrer que $\breve{\eta}_{X',Y'}$ est fonctoriel en $X', Y'$, nous démontrons qu'il est fonctoriel en une variable, par exemple $X'$, la démonstration pour l'autre variable étant analogue. Considérons donc le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} (\mathscr{C}FX'\otimes \mathscr{C}FY')\otimes(\eta X'\otimes \eta Y') \arrow[r, "\breve{\mathscr{C}F}\otimes \breve{\eta}"] \arrow[d, "(\mathscr{C}Fu'\otimes id)\otimes(\eta u'\otimes id)"'] & \mathscr{C}F(X'\otimes Y')\otimes \eta(X'\otimes Y') \arrow[d, "\mathscr{C}F(u'\otimes id)\otimes \eta(u'\otimes id)"] \\ (\mathscr{C}FX'_1\otimes \mathscr{C}FY')\otimes(\eta X'_1\otimes \eta Y') \arrow[r, "\breve{\mathscr{C}F}\otimes \breve{\eta}"] & \mathscr{C}F(X'_1\otimes Y')\otimes \eta(X'_1\otimes Y') \end{tikzcd}$$

dont la commutativité résulte du fait que $\breve{\mathscr{C}F}\otimes \breve{\eta}$ est fonctoriel en $X'$ (Diag. (2) et (3)). Or ce diagramme est le contour extérieur du diagramme suivant dans lequel la commutativité de la région (II) résulte de la fonctorialité de $\breve{\mathscr{C}F}$ :

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{Z}FX' \otimes \mathfrak{Z}FY') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "\breve{\mathfrak{Z}F} \otimes \breve{\eta}"] \arrow[d, "(id \otimes id) \otimes (\eta u' \otimes id)"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \mathfrak{Z}F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X' \otimes Y') \arrow[d, "\mathfrak{Z}F(id \otimes id) \otimes \eta(u' \otimes id)"] \\
(\mathfrak{Z}FX' \otimes \mathfrak{Z}FY') \otimes (\eta X'_1 \otimes \eta Y') \arrow[r, "\breve{\mathfrak{Z}F} \otimes \breve{\eta}"] \arrow[d, "(\mathfrak{Z}Fu' \otimes id) \otimes (id \otimes id)"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \mathfrak{Z}F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X'_1 \otimes Y') \arrow[d, "\mathfrak{Z}F(u' \otimes id) \otimes \eta(id \otimes id)"] \\
(\mathfrak{Z}FX'_1 \otimes \mathfrak{Z}FY') \otimes (\eta X'_1 \otimes \eta Y') \arrow[r, "\breve{\mathfrak{Z}F} \otimes \breve{\eta}"] & \mathfrak{Z}F(X'_1 \otimes Y') \otimes \eta(X'_1 \otimes Y')
\end{tikzcd}$$

On en déduit la commutativité de la région (I) qui, à son tour, est le contour extérieur du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{Z}FX' \otimes \mathfrak{Z}FY') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "\breve{\mathfrak{Z}F} \otimes id"] \arrow[d, "(id \otimes id) \otimes (\eta u' \otimes id)"'] & \mathfrak{Z}F(X' \otimes Y') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "id \otimes \breve{\eta}"] \arrow[d, "\mathfrak{Z}F(id \otimes id) \otimes (\eta u' \otimes id)"] & \mathfrak{Z}F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X' \otimes Y') \arrow[d, "\mathfrak{Z}F(id \otimes id) \otimes \eta(u' \otimes id)"] \\
(\mathfrak{Z}FX' \otimes \mathfrak{Z}FY') \otimes (\eta X'_1 \otimes \eta Y') \arrow[r, "\breve{\mathfrak{Z}F} \otimes id"] & \mathfrak{Z}F(X' \otimes Y') \otimes (\eta X'_1 \otimes \eta Y') \arrow[r, "id \otimes \breve{\eta}"] & \mathfrak{Z}F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X'_1 \otimes Y')
\end{tikzcd}$$

dont la région à gauche est manifestement commutative, ce qui implique la commutativité de la région à droite et par suite celle du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\eta X' \otimes \eta Y' \arrow[r, "\breve{\eta}"] \arrow[d, "\eta u' \otimes id"'] & \eta(X' \otimes Y') \arrow[d, "\eta(u' \otimes id)"] \\
\eta X'_1 \otimes \eta Y' \arrow[r, "\breve{\eta}"] & \eta(X'_1 \otimes Y')
\end{tikzcd}$$

puisque $\mathfrak{Z}F(X' \otimes Y')$ est régulier. D'où la fonctorialité de $\breve{\eta}$ en $X'$. Nous avons ainsi le $\otimes$-foncteur $(\eta, \breve{\eta}) : \underline{C}' \to \underline{Q}$.

Prouvons la compatibilité du $\otimes$-foncteur $(\eta, \breve{\eta}) : \underline{C}' \to \underline{Q}$ avec les contraintes de commutativité. Pour cela, considérons le diagramme ci-dessous dans lequel la commutativité des régions (I), (V) résulte de la définition de $\breve{\eta}$ (Diag. (3)) ; celle de (II) de la fonctorialité de $c$ et de la relation $c_{1_{\underline{Q}}, 1_{\underline{Q}}} = id$ ; celle de (III), (VII) découle de (Chap. I, §3, n° 1, Prop. 7) ; celle de (IV) vient de la compatibilité du $\otimes$-foncteur $(\mathfrak{Z}F, \breve{\mathfrak{Z}F})$ avec les contraintes de commutativité ; celle de (V), (VI), (VIII) est évidente ; enfin celle du circuit extérieur est la définition de $\eta c'$ ( Diag. (21)).

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
1_{\underline{Q}} \arrow[d, "\lambda"'] & & & & \\
1_{\underline{Q}} \otimes 1_{\underline{Q}} \arrow[dd, equal] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(II)}", shift right=6ex] & (\psi F X' \otimes \eta X') \otimes (\psi F Y' \otimes \eta Y') \arrow[l, "\mu_{X'} \otimes \mu_{Y'}"'] \arrow[r, dashed] \arrow[d, "c"] & (\psi F X' \otimes \psi F Y') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "\breve{\psi F} \otimes id"] \arrow[d, "c \otimes id"] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(IV)}", shift right=6ex] & \psi F(X' \otimes Y') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "id \otimes \breve{\eta}"] \arrow[d, "\psi F c' \otimes id"] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(V)}", shift right=6ex] & \psi F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X' \otimes Y') \arrow[d, "\psi F c' \otimes id"] \arrow[llllu, "\mu_{X' \otimes Y'}"', "\mathrm{(I)}"] \\
 & (\psi F Y' \otimes \eta Y') \otimes (\psi F X' \otimes \eta X') \arrow[ul, "\mu_{Y'} \otimes \mu_{X'}"'] \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(III)}", shift left=6ex] & (\psi F Y' \otimes \psi F X') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "\breve{\psi F} \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes c"] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(VIII)}", shift right=6ex] & \psi F(Y' \otimes X') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "id \otimes \breve{\eta}"] \arrow[d, "id \otimes c"] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(IX)}", shift right=6ex] & \psi F(Y' \otimes X') \otimes \eta(X' \otimes Y') \arrow[d, "id \otimes \eta c'"] \\
1_{\underline{Q}} \otimes 1_{\underline{Q}} \arrow[r, phantom, "\mathrm{(VI)}", shift left=6ex] & (\psi F Y' \otimes \eta Y') \otimes (\psi F X' \otimes \eta X') \arrow[l, "\mu_{Y'} \otimes \mu_{X'}"'] \arrow[r, dashed] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(VII)}", shift left=6ex] & (\psi F Y' \otimes \psi F X') \otimes (\eta Y' \otimes \eta X') \arrow[r, "\breve{\psi F} \otimes id"] & \psi F(Y' \otimes X') \otimes (\eta Y' \otimes \eta X') \arrow[r, "id \otimes \breve{\eta}"] & \psi F(Y' \otimes X') \otimes \eta(Y' \otimes X') \arrow[lllld, "\mu_{Y' \otimes X'}", "\mathrm{(X)}"'] \\
1_{\underline{Q}} \arrow[u, "\lambda"] & & & &
\end{tikzcd}
$$

On en déduit la commutativité de la région (IX) qui, à facteur régulier près, exprime la compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les contraintes de commutativité. Prouvons la compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les contraintes d'associativité. Pour cela, considérons le diagramme

(4)

$$\begin{tikzcd}
 & \psi F(X'\otimes(Y'\otimes Z'))\otimes\eta(X'\otimes(Y'\otimes Z')) \arrow[dl, "\mu_{X'\otimes(Y'\otimes Z')}"'] & & \\
\underline{1}_Q \arrow[d, "d"] \arrow[rr, phantom, "(\mathrm{I})"] & & (\psi FX'\otimes\psi F(Y'\otimes Z'))\otimes(\eta X'\otimes\eta(Y'\otimes Z')) \arrow[ul, "\breve{\psi F}\otimes\breve{\eta}"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\psi FX'\otimes(\psi FY'\otimes\psi FZ'))\otimes(\eta X'\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[l, "(id\otimes\breve{\psi F})\otimes(id\otimes\breve{\eta})"'] \arrow[d, dashed] \\
\underline{1}_Q\otimes\underline{1}_Q \arrow[d, "id\otimes d"] & & (\psi FX'\otimes\eta X')\otimes(\psi F(Y'\otimes Z')\otimes\eta(Y'\otimes Z')) \arrow[ll, "\mu_{X'}\otimes\mu_{Y'\otimes Z'}"'] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\psi FX'\otimes\eta X')\otimes((\psi FY'\otimes\psi FZ')\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[l, "(id\otimes id)\otimes(\breve{\psi F}\otimes\breve{\eta})"'] \arrow[d, dashed] \\
\underline{1}_Q\otimes(\underline{1}_Q\otimes\underline{1}_Q) & & & (\psi FX'\otimes\eta X')\otimes((\psi FY'\otimes\eta Y')\otimes(\psi FZ'\otimes\eta Z')) \arrow[lll, "\mu_{X'}\otimes(\mu_{Y'}\otimes\mu_{Z'})"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité des régions (I), (III) résulte de la définition de $\breve{\eta}$ (Diag. (31)) et celle de la région (II) est donnée par la fonctorialité des contraintes a, c. On en déduit la commutativité du circuit extérieur. De la même manière, on démontre la commutativité du diagramme

$$(5)\qquad \begin{tikzcd}
\mathfrak{Z}F((X'\otimes Y')\otimes Z')\otimes\eta((X'\otimes Y')\otimes Z') \arrow[d, "\mu_{(X'\otimes Y')\otimes Z'}"'] & (\mathfrak{Z}F(X'\otimes Y')\otimes\mathfrak{Z}Z')\otimes(\eta(X'\otimes Y')\otimes\eta Z') \arrow[l, "\breve{\mathfrak{Z}F}\otimes\breve{\eta}"'] \\
\underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[d, "d"'] & \\
\underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[d, "d\otimes id"'] & \\
(\underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\underline{1}_{\underline{Q}})\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} & \\
((\mathfrak{Z}FX'\otimes\eta X')\otimes(\mathfrak{Z}FY'\otimes\eta Y'))\otimes(\mathfrak{Z}FZ'\otimes\eta Z') \arrow[u, "(\mu_{X'}\otimes\mu_{Y'})\otimes\mu_{Z'}"] & ((\mathfrak{Z}FX'\otimes\mathfrak{Z}FY')\otimes\mathfrak{Z}FZ')\otimes((\eta X'\otimes\eta Y')\otimes\eta Z') \arrow[l, dashed] \arrow[uuuu, "(\breve{\mathfrak{Z}F}\otimes id)\otimes(\breve{\eta}\otimes id)"']
\end{tikzcd}$$

Cela étant, considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{Z}FX'\otimes\eta X')\otimes((\mathfrak{Z}FY'\otimes\eta Y')\otimes(\mathfrak{Z}FZ'\otimes\eta Z')) \arrow[rrrrr, "\mu_{X'}\otimes(\mu_{Y'}\otimes\mu_{Z'})"] & & & & & \underline{1}_{\underline{Q}}\otimes(\underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\underline{1}_{\underline{Q}}) \\
(\mathfrak{Z}FX'\otimes(\mathfrak{Z}FY'\otimes\mathfrak{Z}FZ'))\otimes(\eta X'\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[u, dashed] \arrow[r, "(id\otimes\breve{\mathfrak{Z}F})\otimes(id\otimes\breve{\eta})"] & (\mathfrak{Z}FX'\otimes\mathfrak{Z}F(Y'\otimes Z'))\otimes(\eta X'\otimes\eta(Y'\otimes Z')) \arrow[r, "\breve{\mathfrak{Z}F}\otimes\breve{\eta}"] & \mathfrak{Z}F(X'\otimes(Y'\otimes Z'))\otimes\eta(X'\otimes(Y'\otimes Z')) \arrow[r, "\mu_{X'\otimes(Y'\otimes Z')}"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(VII)}"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "d"] & \underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[u, "id\otimes d"'] \arrow[r, "d\otimes id"] & (\underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\underline{1}_{\underline{Q}})\otimes\underline{1}_{\underline{Q}}
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{(VI)}$ $\qquad\mathfrak{Z}F'\otimes\ldots\qquad$ $\mathrm{(II)}$ $\qquad\mu_{(X'\otimes Y')\otimes Z'}\qquad(\mu_{X'}\otimes\mu_{Y'})\ldots$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots\otimes\underline{1})\otimes\underline{1}_{Q} & ((\mathfrak{U}FX'\otimes\eta X')\otimes(\mathfrak{U}FY'\otimes\eta Y'))\otimes(\mathfrak{U}FZ'\otimes\eta Z') \arrow[l, "(\mu_{X'}\otimes\mu_{Y'})\otimes\mu_{Z'}"'] & ((\mathfrak{U}FX'\otimes\mathfrak{U}FY')\otimes\mathfrak{U}FZ')\otimes((\eta X'\otimes\eta Y')\otimes\eta Z') \arrow[l, dashed] \arrow[r, "(\breve{\mathfrak{U}F}\otimes id)\otimes id"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{(I)}"] & (\mathfrak{U}F(X'\otimes Y')\otimes\mathfrak{U}FZ')\otimes((\eta X'\otimes\eta Y')\otimes\eta Z') \arrow[d, "\breve{\mathfrak{U}F}\otimes id"] \\
\cdots \arrow[d, phantom, "\mathrm{(II)}"] & \mathfrak{U}F((X'\otimes Y')\otimes Z')\otimes\eta((X'\otimes Y')\otimes Z') \arrow[l, "\mu_{(X'\otimes Y')\otimes Z'}"'] & \mathfrak{U}F((X'\otimes Y')\otimes Z')\otimes(\eta(X'\otimes Y')\otimes\eta Z') \arrow[l, "id\otimes\breve{\eta}"'] \arrow[d, phantom, "\mathrm{(III)}"] & \mathfrak{U}F((X'\otimes Y')\otimes Z')\otimes((\eta X'\otimes\eta Y')\otimes\eta Z') \arrow[l, "id\otimes(\breve{\eta}\otimes id)"'] \arrow[d, "id\otimes a^{-1}"] \\
(\cdots\otimes Z')) \arrow[r, "\mathfrak{U}Fa'\otimes id"] & \mathfrak{U}F((X'\otimes Y')\otimes Z')\otimes\eta(X'\otimes(Y'\otimes Z')) \arrow[u, "id\otimes\eta a'"] & \mathfrak{U}F((X'\otimes Y')\otimes Z')\otimes(\eta X'\otimes\eta(Y'\otimes Z')) \arrow[l, "id\otimes\breve{\eta}"'] \arrow[d, phantom, "\mathrm{(V)}"] & \mathfrak{U}F((X'\otimes Y')\otimes Z')\otimes(\eta X'\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[l, "id\otimes(id\otimes\breve{\eta})"'] \arrow[d, "(\breve{\mathfrak{U}F})^{-1}\otimes id"] \\
\eta(Y'\otimes Z')) \quad \mathrm{(IV)} \quad \breve{\eta}) & (\mathfrak{U}F(X'\otimes Y')\otimes\mathfrak{U}FZ')\otimes(\eta X'\otimes\eta(Y'\otimes Z')) \arrow[u, "\breve{\mathfrak{U}F}\otimes\breve{\eta}"] & & (\mathfrak{U}F(X'\otimes Y')\otimes\mathfrak{U}FZ')\otimes(\eta X'\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[d, "((\breve{\mathfrak{U}F})^{-1}\otimes id)\otimes id"] \\
X'\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[r, "a\otimes id"] & ((\mathfrak{U}FX'\otimes\mathfrak{U}FY')\otimes\mathfrak{U}FZ')\otimes(\eta X'\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[u, "(\breve{\mathfrak{U}F}\otimes id)\otimes(id\otimes\breve{\eta})"] \arrow[rr, equal] & \arrow[d, phantom, "\mathrm{(VI)}"] & ((\mathfrak{U}FX'\otimes\mathfrak{U}FY')\otimes\mathfrak{U}FZ')\otimes(\eta X'\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[d, dashed, no head] \\
Y')\otimes(\mathfrak{U}FZ'\otimes\eta Z')) & & & \phantom{X} \arrow[lll, dashed]
\end{tikzcd}
$$

dans lequel la commutativité des régions (I), (VII) résulte de celle des diagrammes (4), (5) respectivement ; celle de (II) de la définition de $\eta a'$ (Diag. (21)) ; celle de (IV) de la compatibilité de $(\mathcal{E}F, \breve{\mathcal{E}}F)$ avec les contraintes d'associativité ; celle de (V) s'obtient en composant les flèches ; celle de (VI) est le résultat de (Chap. I, §3, n°1, Prop. 7) ; enfin celle du circuit extérieur vient de la fonctorialité de la contrainte d'associativité $a$ de $\underline{Q}$, de la compatibilité entre les contraintes d'associativité $a$ et d'unité $(\underline{1}_{\underline{Q}}, g, d)$ de $\underline{Q}$, et de (Chap. I, §3, n°1 ; Prop. 7). On en déduit la commutativité de la région (III) qui, à facteur régulier près, exprime la compatibilité de $(\eta, \breve{\eta})$ avec les contraintes d'associativité. Enfin, prouvons la compatibilité de $(\eta, \breve{\eta})$ avec les unités. Pour cela, il suffit de remarquer que, les $\otimes$-foncteurs $(F, \breve{F})$, $(\mathcal{E}, \breve{\mathcal{E}})$ étant compatibles avec les unités, on a par conséquent $\mathcal{E}F\underline{1}' \simeq \underline{1}_{\underline{Q}}$, ce qui implique $\eta\underline{1}' \simeq \underline{1}_{\underline{Q}}$. La compatibilité de $(\eta, \breve{\eta})$ avec les unités s'obtient aussitôt en appliquant (Chap. I, §4, n°2, Prop. 8).

Enfin l'isomorphisme $\mu_{X'}$ est bien fonctoriel en $X'$ en vertu de la définition de $\eta u'$ (Diag (21)), ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque</u>. En vertu de (Chap. I, §4, n°2, Cor. de la Prop. 4) les $\otimes$-isomorphismes d'un $\otimes$-foncteur unifère dans un $\otimes$-foncteur unifère sont les $\otimes$-isomorphismes unifères ; par conséquent quand nous avons un $\otimes$-isomorphisme unifère d'un $\otimes$-foncteur unifère dans un $\otimes$-foncteur unifère, nous disons simplement que c'est un $\otimes$-isomorphisme.

Les hypothèses étant toujours celles du lemme 2, nous définissons en plus un $\otimes$-foncteur $(T, \breve{T}) : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C} \times \underline{C}'$ de la manière suivante

$$\begin{array}{ccc} X' & \longmapsto & TX' = (FX', X') \\ {\scriptstyle u'}\big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle Tu' = (Fu', u')} \\ Y' & \longmapsto & TY' = (FY', Y') \end{array}$$

$$\breve{T}_{X', Y'} : (FX' \otimes FY', X' \otimes Y') \xrightarrow{\breve{F} \otimes id} (F(X' \otimes Y'), X' \otimes Y')$$

Il est clair que $(T,\check{T})$ est un $\otimes$-foncteur ACU. Cela étant, nous avons :

<u>Lemme 3</u>.– $\mu$ est un $\otimes$-isomorphisme du foncteur

$$(\mathscr{G}\otimes\eta,\ \widecheck{\mathscr{G}\otimes\eta})\circ(T,\check{T}) : \underline{C}' \longrightarrow \underline{Q}$$

dans le foncteur

$$(I_{\underline{Q}},\check{I}_{\underline{Q}}) : \underline{C}' \longrightarrow \underline{Q}$$

$(I_{\underline{Q}},\check{I}_{\underline{Q}})$ étant le $\otimes$-foncteur $\underline{1}_{\underline{Q}}$ constant (§1, n°2, Déf. 3).

<u>Démonstration</u>.– Prouvons que $\mu$ est un $\otimes$-morphisme. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{G}\otimes\eta)TX'\otimes(\mathscr{G}\otimes\eta)TY' = (\mathscr{G}FX'\otimes\eta X')\otimes(\mathscr{G}FY'\otimes\eta Y') \arrow[ddd, "\widecheck{(\mathscr{G}\otimes\eta)T}"'] \arrow[d, dashed] \arrow[r, "\mu_{X'}\otimes\mu_{Y'}"] & \underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} \\
(\mathscr{G}FX'\otimes\mathscr{G}FY')\otimes(\eta X'\otimes\eta Y') \arrow[d, "\check{\mathscr{G}}\otimes\check{\eta}"] \arrow[l, phantom, "(\mathrm{I})"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{II})"] & \\
\mathscr{G}(FX'\otimes FY')\otimes\eta(X'\otimes Y') \arrow[d, "\mathscr{G}\check{F}\otimes id"] & \\
(\mathscr{G}\otimes\eta)T(X'\otimes Y') = \mathscr{G}F(X'\otimes Y')\otimes\eta(X'\otimes Y') \arrow[r, "\mu_{X'\otimes Y'}"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[uuu, "d"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité de la région (I) résulte de la définition de $\widecheck{\mathscr{G}\otimes\eta}$ (lemme 1), et celle de (II) de la définition de $\check{\eta}$ (Diag. (3)). D'où la commutativité du circuit extérieur qui montre que $\mu$ est un $\otimes$-morphisme.

<u>Lemme 4</u>.– Les hypothèses étant celles du lemme 2, on suppose en plus qu'on ait un $\otimes$-foncteur $(\mathscr{G}_1,\check{\mathscr{G}}_1) : \underline{C} \longrightarrow \underline{Q}$ ayant les mêmes propriétés que $(\mathscr{G},\check{\mathscr{G}})$. Soit $(\eta_1,\check{\eta}_1)$ le $\otimes$-foncteur qui correspond à $(\mathscr{G}_1,\check{\mathscr{G}}_1)$, défini de la même manière que $(\eta,\check{\eta})$. Si $\rho : (\mathscr{G},\check{\mathscr{G}}) \xrightarrow{\sim} (\mathscr{G}_1,\check{\mathscr{G}}_1)$ est un $\otimes$-isomor–

phisme, alors il existe un $\otimes$-isomorphisme unique $\rho' : (\eta, \breve{\eta}) \xrightarrow{\sim} (\eta_1, \breve{\eta}_1)$ tel que soit commutatif le diagramme

$$
(6) \qquad
\begin{tikzcd}
(\xi\otimes\eta, \overset{\smile}{\xi\otimes\eta}) \circ (T, \breve{T}) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "(\rho\otimes\rho')T"'] & (I_{\underline{Q}}, \breve{I}_{\underline{Q}}) \arrow[d, equal] \\
(\xi_1\otimes\eta_1, \overset{\smile}{\xi_1\otimes\eta_1}) \circ (T, \breve{T}) \arrow[r, "\mu_1"] & (I_{\underline{Q}}, \breve{I}_{\underline{Q}})
\end{tikzcd}
$$

Démonstration.- Supposons qu'il existe un $\otimes$-isomorphisme $\rho' : (\eta, \breve{\eta}) \xrightarrow{\sim} (\eta_1, \breve{\eta}_1)$ tel que le diagramme (6) soit commutatif, i.e pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$ on a la commutativité du diagramme suivant

$$
(7) \qquad
\begin{tikzcd}
\xi FX'\otimes\eta X' \arrow[r, "\mu_{X'}"] \arrow[dr, "\rho_{FX'}\otimes id"'] & \underline{1}_{\underline{Q}} & \xi_1 FX'\otimes\eta_1 X' \arrow[l, "\mu_{1X'}"'] \\
& \xi_1 FX'\otimes\eta X' \arrow[ur, "id\otimes\rho'_{X'}"'] &
\end{tikzcd}
$$

D'où l'unicité de $\rho'$ puisque $\xi_1 FX'$ est régulier.

Soit $\rho'_{X'} : \eta X' \longrightarrow \eta_1 X'$ défini par le diagramme commutatif (7) pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$. Il est manifeste que $\rho'_{X'}$ est un isomorphisme puisque toutes les flèches figurant dans (7) sont des isomorphismes et $\xi_1 FX'$ est régulier. Prouvons que $\rho'_{X'}$ est fonctoriel en $X'$. Soit $u' : X' \longrightarrow Y'$ une flèche de $\underline{C}'$ et considérons le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\xi FX'\otimes\eta X' \arrow[r, "\rho_{FX'}\otimes id"] \arrow[d, "\xi Fu'\otimes id"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(I)}"] & \xi_1 FX'\otimes\eta X' \arrow[r, "id\otimes\rho'_{X'}"] \arrow[d, "\xi_1 Fu'\otimes id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & \xi_1 FX'\otimes\eta_1 X' \arrow[d, "\xi_1 Fu'\otimes id"] \\
\xi FY'\otimes\eta X' \arrow[r, "\rho_{FY'}\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\eta u'"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & \xi_1 FY'\otimes\eta X' \arrow[r, "id\otimes\rho'_{X'}"] \arrow[d, "id\otimes\eta u'"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & \xi_1 FY'\otimes\eta_1 X' \arrow[d, "id\otimes\eta_1 u'"] \\
\xi FY'\otimes\eta Y' \arrow[r, "\rho_{FY'}\otimes id"] & \xi_1 FY'\otimes\eta Y' \arrow[r, "id\otimes\rho'_{Y'}"] & \xi_1 FY'\otimes\eta_1 Y'
\end{tikzcd}
$$

dans lequel la région (I) est commutative puisque $\rho F$ est fonctoriel en $X'$, tandis que les régions (II), (III) sont commutatives par évidence. D'où la commutativité de la région (IV) est équivalente à celle du circuit extérieur. Or la commutativité de celui-ci résulte du fait que $\rho_{FX'} \otimes \rho'_{X'}$, étant le composé (voir Diag (7)) de deux flèches $\mu_{X'}$, $\mu'_{X'}$ qui sont fonctorielles en $X'$ (Lemme 2), est fonctoriel en $X'$. On en déduit la commutativité de (IV), et par suite, la fonctorialité de $\rho'$ puisque $\mathcal{G}_1 FY'$ est régulier. Pour montrer que $\rho'$ est un $\otimes$-morphisme, nous considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathcal{G}F(X'\otimes Y')\otimes\eta(X'\otimes Y') \arrow[r, "\rho_{F(X'\otimes Y')}\otimes id"] & \mathcal{G}_1F(X'\otimes Y')\otimes\eta(X'\otimes Y') \arrow[r, "id\otimes\rho'_{X'\otimes Y'}"] & \mathcal{G}_1F(X'\otimes Y')\otimes\eta_1(X'\otimes Y') \\
\mathcal{G}F(X'\otimes Y')\otimes(\eta X'\otimes\eta Y') \arrow[u, "id\otimes\breve{\eta}"] \arrow[r, "\rho_{F(X'\otimes Y')}\otimes id"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(I)}"] & \mathcal{G}_1F(X'\otimes Y')\otimes(\eta X'\otimes\eta Y') \arrow[u, "id\otimes\breve{\eta}"] \arrow[r, "id\otimes(\rho'_{X'}\otimes\rho'_{Y'})"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(II)}"] & \mathcal{G}_1F(X'\otimes Y')\otimes(\eta_1X'\otimes\eta_1Y') \arrow[u, "id\otimes\breve{\eta}_1"] \\
(\mathcal{G}FX'\otimes\mathcal{G}FY')\otimes(\eta X'\otimes\eta Y') \arrow[u, "\breve{\mathcal{G}}F\otimes id"] \arrow[r, "(\rho_{FX'}\otimes\rho_{FY'})\otimes id"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(III)}"] & (\mathcal{G}_1FX'\otimes\mathcal{G}_1FY')\otimes(\eta X'\otimes\eta Y') \arrow[u, "\breve{\mathcal{G}}_1F\otimes id"] \arrow[r, "id\otimes(\rho'_{X'}\otimes\rho'_{Y'})"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & (\mathcal{G}_1FX'\otimes\mathcal{G}_1FY')\otimes(\eta_1X'\otimes\eta_1Y') \arrow[u, "\breve{\mathcal{G}}_1F\otimes id"] \\
(\mathcal{G}FX'\otimes\eta X')\otimes(\mathcal{G}FY'\otimes\eta Y') \arrow[u, dashed] \arrow[uuu, bend left=60, "\breve{\mathcal{G}F\otimes\eta}"] \arrow[rr, "(\rho_{FX'}\otimes\rho'_{X'})\otimes(\rho_{FY'}\otimes\rho'_{Y'})"] \arrow[urr, phantom, "\mathrm{(V)}"] & & (\mathcal{G}_1FX'\otimes\eta_1X')\otimes(\mathcal{G}_1FY'\otimes\eta_1Y') \arrow[u, dashed] \arrow[uuu, bend right=60, "\breve{\mathcal{G}_1F\otimes\eta_1}"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité des régions (I), (IV) est évidente ; celle de (III) résulte du fait que $\rho F$ est un $\otimes$-morphisme ; celle de (V) de la fonctorialité des contraintes d'associativité et de commutativité de $\underline{Q}$ ; celle de (VI), (VII) de la définition de $\widetilde{\mathcal{C}F\otimes\eta}$ et $\widetilde{\mathcal{C}_1F\otimes\eta}$ (Lemme 1) ; enfin celle du circuit extérieur vient du fait que $\rho F\otimes\rho'$ étant le composé de deux $\otimes$-morphismes $\mu$ et $\mu_1$, est un $\otimes$-morphisme (Diag. (7)). D'où la commutativité de la région (II) qui prouve que $\rho'$ est un $\otimes$-morphisme puisque $\mathcal{C}_1 F(X'\otimes Y')$ est régulier. Enfin on a bien le diagramme (6) commutatif puisque $\rho'$ est défini par le diagramme commutatif (7). On a ainsi démontré l'existence du $\otimes$-isomorphisme $\rho'$.

Considérons toujours le $\otimes$-foncteur $(T,\breve{T}) : \underline{C}' \to \underline{C}\times\underline{C}'$, et soient $\mathcal{S}$ la partie multiplicative de $\underline{C}\times\underline{C}'$ engendrée par l'ensemble des endomorphismes de la forme $T(c'_{X',X'}) = (Fc'_{X',X'}, c'_{X',X'})$, $(\underline{C}\times\underline{C}')^{\mathcal{S}}$ la $\otimes$-catégorie AC quotient de $\underline{C}\times\underline{C}'$ définie par $\mathcal{S}$, $\underline{P}$ la $\otimes$-catégorie ACU de la $\otimes$-catégorie AC $\underline{C}\times\underline{C}'$ définie par $(\underline{C}', (T,\breve{T}))$, $(D,\breve{D}) : \underline{C}\times\underline{C}' \to \underline{P}$ le $\otimes$-foncteur canonique, et $\lambda : (D,\breve{D})\circ(T,\breve{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{P}}, \breve{I}_{\underline{P}})$ le $\otimes$-isomorphisme canonique (§1, n° 2, Déf. 4). Donc nous avons ici, pour la catégorie $\underline{P}$,

$$\mathrm{Ob}\,\underline{P} = \{(X, X') \mid X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C},\ X'\in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{P}}((X,X'),(Y,Y')) = \{[A', B', (u,u')] \mid A', B' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}',\ (u,u') : (X\otimes FA', X'\otimes A') \to (Y\otimes FB', Y'\otimes B')\}$$

où $[A'_1, B'_1, (u_1, u'_1)] = [A'_2, B'_2, (u_2, u'_2)]$ si et seulement s'il existe des objets $C'_1, C'_2$ et des isomorphismes dans $\underline{C}'$

$$u' : A'_1\otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} A'_2\otimes C'_2$$

$$v' : B'_1\otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} B'_2\otimes C'_2$$

tels que soit commutatif dans $(\underline{C}\times\underline{C}')^{\mathcal{S}}$ le diagramme

Kontrollieren ist (Modell von P.!)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
(X\otimes F(A_1'\otimes C_1'),\ X'\otimes(A_1'\otimes C_1')) \arrow[d, "(id\otimes Fu',\ id\otimes u')"', "\wr"] & (X\otimes(FA_1'\otimes FC_1'),\ X'\otimes(A_1'\otimes C_1')) \arrow[l, "(id\otimes\check{F},\ id\otimes id)"', "\sim"] \arrow[r, "(a,\ a')", "\sim"'] & ((X\otimes FA_1')\otimes FC_1',\ (X'\otimes A_1')\otimes C_1') \arrow[d, "(u_1\otimes id,\ u_1'\otimes id)"] \\
(X\otimes F(A_2'\otimes C_2'),\ X'\otimes(A_2'\otimes C_2')) & & ((Y\otimes FB_1')\otimes FC_1',\ (Y'\otimes B_1')\otimes C_1') \\
(X\otimes(FA_2'\otimes FC_2'),\ X'\otimes(A_2'\otimes C_2')) \arrow[u, "(id\otimes\check{F},\ id\otimes id)", "\wr"'] \arrow[d, "(a,\ a')"', "\wr"] & & (Y\otimes(FB_1'\otimes FC_1'),\ Y'\otimes(B_1'\otimes C_1')) \arrow[u, "\wr", "(a,\ a')"'] \arrow[d, "\wr"', "(id\otimes\check{F},\ id\otimes id)"] \\
((X\otimes FA_2')\otimes FC_2',\ (X'\otimes A_2')\otimes C_2') \arrow[d, "(u_2\otimes id,\ u_2'\otimes id)"'] & & (Y\otimes F(B_1'\otimes C_1'),\ Y'\otimes(B_1'\otimes C_1')) \arrow[d, "\wr"', "(id\otimes Fv',\ id\otimes v')"] \\
((Y\otimes FB_2')\otimes FC_2',\ (Y'\otimes B_2')\otimes C_2') & (Y\otimes(FB_2'\otimes FC_2'),\ Y'\otimes(B_2'\otimes C_2')) \arrow[l, "(a,\ a')"', "\sim"] \arrow[r, "(id\otimes\check{F},\ id\otimes id)", "\sim"'] & (Y\otimes F(B_2'\otimes C_2'),\ Y'\otimes(B_2'\otimes C_2'))
\end{tikzcd}
$$

le $\otimes$-foncteur $(D, \breve{D})$ canonique est défini par

$$\begin{array}{ccc}
(X, X') & \longmapsto & D(X, X') = (X, X') \\
\Big\downarrow (u, u') & & \Big\downarrow D(u, u') = [A', A', (u \otimes id_{FA'}, u' \otimes id_{A'})] \\
(Y, Y') & \longmapsto & D(Y, Y') = (Y, Y')
\end{array}$$

$$\breve{D}_{(X,X'),(Y,Y')} = id_{(X,X') \otimes (Y,Y')}$$

$A'$ étant un objet quelconque de $\underline{C}'$, et le $\otimes$-isomorphisme canonique $\lambda$ par

$$\lambda_{X'} = [\underline{1}', X', (c_{FX', F\underline{1}'}, c'_{X', \underline{1}'})] : (FX', X') \xrightarrow{\sim} \underline{1}_{\underline{P}} = (F\underline{1}', \underline{1}')$$

Comme ici les $\otimes$-catégories $\underline{C} \times \underline{C}'$, $\underline{P}$ sont munies des contraintes d'unité, prouvons que $(D, \breve{D})$ est encore unifère. Pour cela il suffit de remarquer que

$$D(\underline{1}, \underline{1}') = (\underline{1}, \underline{1}') \xrightarrow[\sim]{[A', A', (\hat{F} \otimes id, id)]} (F\underline{1}', \underline{1}') = \underline{1}_{\underline{P}}$$

et d'appliquer (Chap I, §4, n° 2, Prop. 8).

Enfin notons par $(\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})$ le composé des $\otimes$-foncteurs

$$\underline{C} \xrightarrow{(i, \breve{i})} \underline{C} \times \underline{C}' \xrightarrow{(D, \breve{D})} \underline{P}$$

et par $(\mathcal{E}, \breve{\mathcal{E}})$ le composé des $\otimes$-foncteurs :

$$\underline{C}' \xrightarrow{(i', \breve{i}')} \underline{C} \times \underline{C}' \xrightarrow{(D, \breve{D})} \underline{P}.$$

$(\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})$ et $(\mathcal{E}, \breve{\mathcal{E}})$ sont manifestement des $\otimes$-foncteurs ACU comme étant des composés des $\otimes$-foncteurs ACU (Chap. I, §4, n° 2, Prop. 1, 2, 3). Cela étant, nous avons la proposition

<u>Proposition 1.</u> — La $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$ et le $\otimes$-foncteur ACU

$(\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})$ possèdent les propriétés suivantes :

1° $\mathcal{D}FX'$ est inversible dans $\underline{P}$ pour tout $X' \in Ob\,\underline{C}'$.

2° Pour tout ⊗-foncteur ACU $(\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}})$ de $\underline{C}$ dans une ⊗-catégorie ACU $\underline{Q}$ tel que $\mathcal{G}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X' \in Ob\,\underline{C}'$, il existe un ⊗-foncteur ACU $(E', \breve{E}')$ de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$, et un ⊗-isomorphisme $\tau : (\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\sim} (E', \breve{E}') \circ (\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})$ ; le couple $((E', \breve{E}'), \tau)$ est unique (à isomorphisme près), i.e s'il existe un autre ⊗-foncteur ACU $(E'_1, \breve{E}'_1)$ de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ et un autre ⊗-isomorphisme $\tau_1 : (\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\sim} (E'_1, \breve{E}'_1) \circ (\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})$, alors $(E', \breve{E}')$ est isomorphe à $(E'_1, \breve{E}'_1)$ par un ⊗-isomorphisme $\tau'$ tel que soit commutatif le diagramme suivant

$$\text{(8)} \qquad \begin{tikzcd} (\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}}) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, equal] & (E', \breve{E}') \circ (\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}}) \arrow[d, "\tau' \mathcal{D}"] \\ (\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}}) \arrow[r, "\tau_1"] & (E'_1, \breve{E}'_1) \circ (\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}}) \end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>.— 1° En vertu de la définition des foncteurs $\mathcal{D}$, $\xi$, nous pouvons définir l'isomorphisme $\nu_{X'} : \mathcal{D}FX' \otimes \xi X' \xrightarrow{\sim} \underline{1}_{\underline{P}}$, $X' \in Ob\,\underline{C}'$, par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}FX' \otimes \xi X' \arrow[rr, "\nu_{X'}"] \arrow[d, equal] & & \underline{1}_{\underline{P}} \\ (FX', \underline{1}') \otimes (\underline{1}, X') = (FX' \otimes \underline{1}, \underline{1}' \otimes X') & & (FX', X') \arrow[ll, "D(d_{FX'},\, g'_{X'})"'] \arrow[u, "\lambda_{X'}"'] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{D}FX'$ est donc inversible. Remarquons que $\nu$ n'est autre que le composé des ⊗-isomorphismes :

$$(\mathcal{D} \otimes \xi, \mathcal{D} \breve{\otimes} \xi) \circ (T, \breve{T}) \xrightarrow{\alpha_{(D, \breve{D})} T} (D, \breve{D}) \circ (T, \breve{T}) \xrightarrow{\lambda} (I_{\underline{P}}, \breve{I}_{\underline{P}})$$

$\alpha_{(D, \breve{D})}$ étant défini dans le lemme 1, d'où $\nu$ est un ⊗-isomorphisme.

2° Soit $(\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}})$ un ⊗-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans une ⊗-catégorie ACU

$\underline{Q}$ tel que $\mathcal{E}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$. En vertu des lemmes 2 et 3, il existe un $\otimes$-foncteur ACU $(\eta, \check{\eta}) : \underline{C}' \to \underline{Q}$ et un $\otimes$-isomorphisme $\mu : (\mathcal{E}\otimes\eta, \widecheck{\mathcal{E}\otimes\eta}) \circ (T, \check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}})$. L'application de la proposition 18 du (§1, n°2) nous donne un $\otimes$-foncteur ACU unique $(E', \check{E}') : \underline{P} \to \underline{Q}$ tel que

$$(\mathcal{E}\otimes\eta, \widecheck{\mathcal{E}\otimes\eta}) = (E', \check{E}') \circ (D, \check{D})$$

$(E', \check{E}')$ étant défini par

$$E'(X, X') = \mathcal{E}X \otimes \eta X' \;;\; \check{E}' = \widecheck{\mathcal{E}\otimes\eta}.$$

Pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, définissons l'isomorphisme $\tau_X : \mathcal{E}X \xrightarrow{\sim} E'DX$ par le diagramme commutatif

$$(9)\qquad \begin{tikzcd}
\mathcal{E}X \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "id \otimes \hat{\eta}"] & \mathcal{E}X \otimes \eta\underline{1}' \arrow[d, equal] \\
\mathcal{E}X \arrow[u, "d_{\mathcal{E}X}"] \arrow[r, "\tau_X"] & E'DX
\end{tikzcd}$$

$\hat{\eta} : \underline{1}_{\underline{Q}} \to \eta\underline{1}'$ étant l'isomorphisme venant de la compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les unités. On vérifie aussitôt que $\tau_X$ est fonctoriel en $X$. Prouvons que $\tau$ est un $\otimes$-morphisme. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}X \otimes \mathcal{E}Y \arrow[r, "d_{\mathcal{E}X} \otimes d_{\mathcal{E}Y}"] \arrow[dddd, "\check{\mathcal{E}}"'] \arrow[ddddr, phantom, "(\mathrm{I})"] & (\mathcal{E}X \otimes \underline{1}_{\underline{Q}}) \otimes (\mathcal{E}Y \otimes \underline{1}_{\underline{Q}}) \arrow[r, "(id\otimes\hat{\eta})\otimes(id\otimes\hat{\eta})"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\mathcal{E}X \otimes \eta\underline{1}') \otimes (\mathcal{E}Y \otimes \eta\underline{1}') \arrow[d] \arrow[dddd, bend left=60, "\check{E}'\check{D}"] \\
 & (\mathcal{E}X \otimes \mathcal{E}Y) \otimes (\underline{1}_{\underline{Q}} \otimes \underline{1}_{\underline{Q}}) \arrow[r, "(id\otimes id)\otimes(\hat{\eta}\otimes\hat{\eta})"] \arrow[d, "\check{\mathcal{E}} \otimes id"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\mathcal{E}X \otimes \mathcal{E}Y) \otimes (\eta\underline{1}' \otimes \eta\underline{1}') \arrow[d, "\check{\mathcal{E}} \otimes id"] \\
 & \mathcal{E}(X \otimes Y) \otimes (\underline{1}_{\underline{Q}} \otimes \underline{1}_{\underline{Q}}) \arrow[r, "\mathcal{E}(id\otimes id)\otimes(\hat{\eta}\otimes\hat{\eta})"] \arrow[ddr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \mathcal{E}(X \otimes Y) \otimes (\eta\underline{1}' \otimes \eta\underline{1}') \arrow[d, "id \otimes \check{\eta}"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{V})"] & {} \\
 & & \mathcal{E}(X \otimes Y) \otimes \eta(\underline{1}' \otimes \underline{1}') \\
\mathcal{E}(X \otimes Y) \arrow[r, "d_{\mathcal{E}(X\otimes Y)}"] & \mathcal{E}(X \otimes Y) \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "id \otimes \hat{\eta}"] \arrow[uu, "id \otimes d"] & \mathcal{E}(X \otimes Y) \otimes \eta\underline{1}' \arrow[u, "id \otimes \eta d'"]
\end{tikzcd}$$

dans lequel la région (I) est commutative en vertu de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 11) ; (II) de la fonctorialité des contraintes d'associativité et de commutativité dans $\underline{Q}$ ; (III) de l'évidence ; (IV) de la compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les contraintes d'unité ; (V) de la définition de $(E', \check{E}')$ et $(\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$. D'où la commutativité du circuit extérieur qui exprime que $\tau$ est un $\otimes$-morphisme, compte tenu de la définition de $\tau$ (Diag. (9)).

Enfin, soient $(E'_1, \check{E}'_1)$ et $\tau_1$ tels que $\tau_1 : (\mathcal{G}, \check{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\sim} (E'_1, \check{E}'_1) \circ (\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$. Pour tout $X' \in Ob\, \underline{C}'$, définissons l'isomorphisme $\mu_{X'} : E'\mathcal{D}FX' \otimes E'\xi X' \xrightarrow{\sim} \underline{1}_{\underline{Q}}$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E'\mathcal{D}FX' \otimes E'\xi X' \arrow[r, "\mu_{X'}"] \arrow[d, "\check{E}'"'] & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[d, "\hat{E}'"] \\
E'(\mathcal{D}FX' \otimes \xi X') \arrow[r, "E'v_{X'}"] & E'(\underline{1}_{\underline{P}})
\end{tikzcd}$$

Par sa définition $\mu_{X'}$ est bien fonctoriel en $X'$. Montrons que

$$\mu : (E'\mathcal{D} \otimes E'\xi, \overbrace{E'\mathcal{D} \otimes E'\xi}) \circ (T, \check{T}) \longrightarrow (I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}})$$

est un $\otimes$-morphisme. En vertu de la définition de $\mu$, il nous suffit de prouver que

$$\check{E}' : (E'\mathcal{D} \otimes E'\xi, \overbrace{E'\mathcal{D} \otimes E'\xi}) \circ (T, \check{T}) \longrightarrow (E', \check{E}') \circ (\mathcal{D} \otimes \xi, \overbrace{\mathcal{D} \otimes \xi}) \circ (T, \check{T})$$

est un $\otimes$-morphisme, puisque, $v$ étant un $\otimes$-morphisme, il en est de même donc de $E'v$. Pour cela, considérons le diagramme ci-dessous dans lequel la commutativité de la région (I) résulte de (Chap. I, §4, n°2, Prop. 12) ; celle de (II), (III) de la fonctorialité de $\check{E}'$ ; celle de (IV), (V), (VI), (VII) des définitions de $\overbrace{(E'\mathcal{D} \otimes E'\xi)T}$, $\overbrace{E'\mathcal{D} \otimes E'\xi}$, $\overbrace{E'(\mathcal{D} \otimes \eta)}$, $\overbrace{E'(\mathcal{D} \otimes \eta)T}$ respectivement. D'où la commutativité du circuit extérieur qui exprime que $\check{E}'$ est un $\otimes$-morphisme. Il faut remarquer qu'ici il y a un abus de notation, ce n'est pas $\check{E}'$ qui est un $\otimes$-morphisme, mais c'est le morphisme fonctoriel $e_{X'} = \check{E}'_{\mathcal{D}FX',\, \xi X'} : E'\mathcal{D}FX' \otimes E'\xi X' \to E'(\mathcal{D}FX' \otimes \xi X')$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
(E'\mathcal{D}FX' \otimes E'\xi X') \otimes (E'\mathcal{D}FY' \otimes E'\xi Y') \arrow[r, "\check{E}' \otimes \check{E}'"] \arrow[d, dashed] \arrow[dddd, bend right=60, "E'\mathcal{D} \otimes E'\xi"'] \arrow[dddddd, bend right=80, "(E'\mathcal{D} \otimes E'\xi)T"'] & E'(\mathcal{D}FX' \otimes \xi X') \otimes E'(\mathcal{D}FY' \otimes \xi Y') \arrow[d, "\check{E}'"] \arrow[dddd, bend left=60, "E'(\mathcal{D} \otimes \xi)"] \arrow[dddddd, bend left=80, "E'(\mathcal{D} \otimes \xi)T"] \\
(E'\mathcal{D}FX' \otimes E'\mathcal{D}FY') \otimes (E'\xi X' \otimes E'\xi Y') \arrow[d, "\check{E}' \otimes \check{E}'"] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(I)}"] & E'((\mathcal{D}FX' \otimes \xi X') \otimes (\mathcal{D}FY' \otimes \xi Y')) \arrow[d, dashed] \\
E'(\mathcal{D}FX' \otimes \mathcal{D}FY') \otimes E'(\xi X' \otimes \xi Y') \arrow[r, "\check{E}'"] \arrow[d, "E'\check{\mathcal{D}} \otimes E'\check{\xi}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & E'((\mathcal{D}FX' \otimes \mathcal{D}FY') \otimes (\xi X' \otimes \xi Y')) \arrow[d, "E'(\check{\mathcal{D}} \otimes \check{\xi})"] \\
E'\mathcal{D}(FX' \otimes FY') \otimes E'\xi(X' \otimes Y') \arrow[r, "\check{E}'"] \arrow[d, equal] & E'(\mathcal{D}(FX' \otimes FY') \otimes \xi(X' \otimes Y')) \arrow[d, equal] \\
(E'\mathcal{D} \otimes E'\xi)(FX' \otimes FY', X' \otimes Y') \arrow[d, "(E'\mathcal{D} \otimes E'\xi)(\check{T})"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & E'(\mathcal{D} \otimes \xi)(FX' \otimes FY', X' \otimes Y') \arrow[d, "E'(\mathcal{D} \otimes \xi)(\check{T})"] \\
(E'\mathcal{D} \otimes E'\xi)(F(X' \otimes Y'), X' \otimes Y') \arrow[d, equal] & E'(\mathcal{D} \otimes \xi)(F(X' \otimes Y'), X' \otimes Y') \arrow[d, equal] \\
E'\mathcal{D}F(X' \otimes Y') \otimes E'\xi(X \otimes Y) \arrow[r, "\check{E}'"] & E'(\mathcal{D}F(X' \otimes Y') \otimes \xi(X' \otimes Y'))
\end{tikzcd}
$$

(IV) (V) (VI) VII

Ensuite de la même manière nous définissons le $\otimes$-isomorphisme

$$\mu_1 : (E'_1 \mathcal{D} \otimes E'_1 \xi,\ \widetilde{E'_1 \mathcal{D} \otimes E'_1 \xi}) \circ (T, \check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}})$$

les deux $\otimes$-isomorphismes $\tau$ et $\tau_1$ nous donnent le $\otimes$-isomorphisme $\rho : (E'\mathcal{D}, \widetilde{E'\mathcal{D}}) \longrightarrow (E'_1\mathcal{D}, \widetilde{E'_1\mathcal{D}})$ par le diagramme commutatif

$$(10)\qquad \begin{array}{ccc} (\mathcal{G}, \check{\mathcal{G}}) & \xrightarrow{\tau} & (E'\mathcal{D}, \widetilde{E'\mathcal{D}}) \\ \| & & \downarrow \rho \\ (\mathcal{G}, \check{\mathcal{G}}) & \xrightarrow{\tau_1} & (E'_1\mathcal{D}, \widetilde{E'_1\mathcal{D}}) \end{array}$$

En vertu du lemme 4, nous avons un $\otimes$-isomorphisme unique

$$\rho' : (E'\xi, \widetilde{E'\xi}) \longrightarrow (E'_1\xi, \widetilde{E'_1\xi})$$

tel que soit commutatif le diagramme

$$(11)\qquad \begin{array}{ccc} (E'\mathcal{D} \otimes E'\xi,\ \widetilde{E'\mathcal{D} \otimes E'\xi}) & \xrightarrow{\mu} & (I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}}) \\ (\rho \otimes \rho')T \downarrow & & \| \\ (E'_1\mathcal{D} \otimes E'_1\xi,\ \widetilde{E'_1\mathcal{D} \otimes E'_1\xi}) & \xrightarrow{\mu_1} & (I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}}) \end{array}$$

Or d'après le lemme 1, nous avons le $\otimes$-isomorphisme

$$\alpha_{(E,\check{E})} : (Ei \otimes Ei',\ \widetilde{Ei \otimes Ei'}) \longrightarrow (E, \check{E})$$

qui est par conséquent fonctoriel en $(E, \check{E})$, i.e si $u : (E, \check{E}) \longrightarrow (E_1, \check{E}_1)$ est un $\otimes$-morphisme unifère, alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} (Ei \otimes Ei',\ \widetilde{Ei \otimes Ei'}) & \xrightarrow{\alpha_{(E,\check{E})}} & (E, \check{E}) \\ ui \otimes ui' \downarrow & & \downarrow u \\ (E_1 i \otimes E_1 i',\ \widetilde{E_1 i \otimes E_1 i'}) & \xrightarrow{\alpha_{(E_1,\check{E}_1)}} & (E_1, \check{E}_1) \end{array}$$

est commutatif. Prenons ici $(E, \check{E}) = (E'D, \widetilde{E'D})$, $(E_1, \check{E}_1) = (E'_1 D, \widetilde{E'_1 D})$. Soit $u : (E'D, \widetilde{E'D}) \longrightarrow (E'_1 D, \widetilde{E'_1 D})$ le $\otimes$-isomorphisme défini par le diagramme commutatif

$$(12)\qquad \begin{array}{ccc} (E'\mathcal{D}\otimes E'\xi,\ \overbrace{E'\mathcal{D}\otimes E'\xi}) & \xrightarrow{\alpha(E'D,\,\breve{E'D})} & (E'D,\ \breve{E'D}) \\ {\scriptstyle f\otimes f'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle r} \\ (E'_1\mathcal{D}\otimes E'_1\xi,\ \overbrace{E'_1\mathcal{D}\otimes E'_1\xi}) & \xrightarrow{\alpha(E'_1D,\,\breve{E'_1D})} & (E'_1D,\ \breve{E'_1D}) \end{array}$$

Puisque le foncteur L est une équivalence (Lemme 1), on voit aussitôt que $f = ri$, $f' = ri'$.

Les diagrammes commutatifs (11) et (12) nous donne la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} (E'D,\ \breve{E'D})\circ(T,\breve{T}) & \xleftarrow{\alpha(E'D,\,\breve{E'D})} & (E'\mathcal{D}\otimes E'\xi,\ \overbrace{E'\mathcal{D}\otimes E'\xi})\circ(T,\breve{T}) & \xrightarrow{\mu} & (I_{\underline{Q}},\ \breve{I}_{\underline{Q}}) \\ {\scriptstyle rT}\big\downarrow & & & & \big\| \\ (E'_1D,\ \breve{E'_1D})\circ(T,\breve{T}) & \xleftarrow{\alpha(E'_1D,\,\breve{E'_1D})} & (E'_1\mathcal{D}\otimes E'_1\xi,\ \overbrace{E'_1\mathcal{D}\otimes E'_1\xi})\circ(T,\breve{T}) & \xrightarrow{\mu_1} & (I_{\underline{Q}},\ \breve{I}_{\underline{Q}}) \end{array}$$

Par conséquent en vertu de (§1, n°2, Prop. 19) nous avons un ⊗-isomorphisme $r' : E' \to E'_1$ tel que $r = r'D$. Dans le diagramme commutatif (10) remplaçons $f$ par $r'Di = r'\mathcal{D}$, nous obtenons bien le diagramme commutatif (8), ce qui achève la démonstration. On voit aussitôt que si la catégorie sous-jacente de la catégorie $\underline{C}$ est un groupoïde et si pour tout $X \in Ob\,\underline{C}$, il existe $Y \in Ob\,\underline{C}$, $X' \in Ob\,\underline{C}'$, tels que $X\otimes Y \simeq FX'$, alors $\underline{P}$ est une Pic-catégorie.

<u>Définition 1</u>.– $\underline{P}$ est appelée la <u>⊗-catégorie de fractions</u> de $\underline{C}$ définie par $(\underline{C}', (F,\breve{F}))$ et $(\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})$ le <u>⊗-foncteur canonique</u> de $\underline{C}$ dans $\underline{P}$.

## 2. <u>Pic-enveloppe d'une ⊗-catégorie ACU</u>

<u>Définition 2</u>.– Soit $\underline{C}^{is}$ la ⊗-catégorie ACU déduite de la ⊗-catégorie ACU $\underline{C}$ en enlevant les flèches qui ne sont pas les isomorphismes. La ⊗-catégorie de fractions de $\underline{C}^{is}$ définie par $(\underline{C}^{is}, (id_{\underline{C}^{is}}, id))$ est une Pic-catégorie notée $Pic(\underline{C})$. Le couple $(Pic(\underline{C}), (\mathcal{D},\breve{\mathcal{D}}))$ est appelé la <u>Pic-enveloppe</u> de $\underline{C}$, $(\mathcal{D},\breve{\mathcal{D}})$ étant le ⊗-fonc-

teur canonique de $\underline{C}^{is}$ dans $\mathrm{Pic}(\underline{C})$.

$\mathrm{Pic}(\underline{C})$ est donc une Pic-catégorie définie de la manière suivante :

$$\mathrm{Ob}\,\mathrm{Pic}(\underline{C}) = \{(A_1, A_2) \mid A_1, A_2 \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pic}(\underline{C})}((A_1,A_2),(B_1,B_2)) = \left\{ [X, Y, (u_1, u_2)] \;\middle|\; \begin{array}{l} (A_1\otimes X, A_2\otimes X) \xrightarrow{(u_1,u_2)} (B_1\otimes Y, B_2\otimes Y), \\ (u_1,u_2) \in \mathrm{Fl}(\underline{C}^{is}\times \underline{C}^{is}) \end{array} \right\}$$

où $[X, Y, (u_1, u_2)] = [U, V, (v_1, v_2)]$ si et seulement s'il existe des objets $C$, $D$ et des isomorphismes

$$u : X\otimes C \xrightarrow{\sim} U\otimes D$$

$$v : Y\otimes C \xrightarrow{\sim} V\otimes D$$

de $\underline{C}$ tels que soit commutatif dans $(\underline{C}^{is}\times \underline{C}^{is})^{\varphi}$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(A_1\otimes(X\otimes C), A_2\otimes(X\otimes C)) \arrow[r, "{(a,a)}"] \arrow[d, "{(id\otimes u, id\otimes u)}"'] & ((A_1\otimes X)\otimes C, (A_2\otimes X)\otimes C) \arrow[r, "{(u_1\otimes id, u_2\otimes id)}"] & ((B_1\otimes Y)\otimes C, (B_2\otimes Y)\otimes C) \\
(A_1\otimes(U\otimes D), A_2\otimes(U\otimes D)) \arrow[d, "{(a,a)}"'] & & (B_1\otimes(Y\otimes C), B_2\otimes(Y\otimes C)) \arrow[u, "{(a,a)}"'] \arrow[d, "{(id\otimes v, id\otimes v)}"] \\
((A_1\otimes U)\otimes D, (A_2\otimes U)\otimes D) \arrow[r, "{(v_1\otimes id, v_2\otimes id)}"] & ((B_1\otimes V)\otimes D, (B_2\otimes V)\otimes D) & (B_1\otimes(V\otimes D), B_2\otimes(V\otimes D)) \arrow[l, "{(a,a)}"']
\end{tikzcd}$$

$\varphi$ étant la partie multiplicative de $\underline{C}^{is}\times \underline{C}^{is}$ engendrée par les endomorphismes de la forme $(c_{X,X}, c_{X,X})$, $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$.

Puisque $\mathrm{Pic}(\underline{C})$ est une Pic-catégorie, ses groupes $\pi_0(\mathrm{Pic}(\underline{C}))$, $\pi_1(\mathrm{Pic}(\underline{C}))$ sont des groupes abéliens (Chap. II, §2, n°1) dont les lois de composition sont notées additivement. Si on note $\overline{(A_1, A_2)}$ les éléments de $\pi_0(\mathrm{Pic}(\underline{C}))$, $(A_1, A_2) \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Pic}(\underline{C})$, alors

(13) $$\overline{(A_1, A_2)} + \overline{(B_1, B_2)} = \overline{(A_1\otimes B_1, A_2\otimes B_2)}$$

D'autre part, soit $[X, Y, (u_1, u_2)] \in \mathrm{Aut}(\underline{1}, \underline{1}) = \pi_1(\mathrm{Pic}(\underline{C}))$, i.e nous avons deux isomorphismes $u_1 : \underline{1} \otimes X \to \underline{1} \otimes Y$, $u_2 : \underline{1} \otimes X \to \underline{1} \otimes Y$. $\underline{1}$ étant régulier, ce qui nous donne deux isomorphismes $v_1, v_2 : X \to Y$ tels que $u_1 = id_{\underline{1}} \otimes v_1$, $u_2 = id_{\underline{1}} \otimes v_2$. Prouvons que

$$[X, Y, (u_1, u_2)] = [X, X, (id \otimes v_2^{-1} v_1, id)]$$

Nous avons en effet la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\underline{1} \otimes X, \underline{1} \otimes X) \arrow[r, "(id \otimes v_1, id \otimes v_2)"] \arrow[d, "id"'] & (\underline{1} \otimes Y, \underline{1} \otimes Y) \arrow[d, "(id \otimes v_2^{-1}, id \otimes v_2^{-1})"] \\
(\underline{1} \otimes X, \underline{1} \otimes X) \arrow[r, "(id \otimes v_2^{-1} v_1, id)"] & (\underline{1} \otimes X, \underline{1} \otimes X)
\end{tikzcd}$$

dans $\underline{C}^{is} \times \underline{C}^{is}$, et a fortiori dans $(\underline{C}^{is} \times \underline{C}^{is})^{\varphi}$. D'où l'égalité voulue en vertu de (§1, n°2, Rem. 1)). Donc chaque élément de $\pi_1(\mathrm{Pic}(\underline{C}))$ peut s'écrire sous la forme $[X, X, (id_{\underline{1}} \otimes f, id_{\underline{1} \otimes X})]$, $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, $f : X \xrightarrow{\sim} X$, qu'on note simplement $\overline{(X, f)}$. Ecrire que les deux flèches $[X, X, (id_{\underline{1}} \otimes f, id_{\underline{1} \otimes X})]$, $[Y, Y, (id_{\underline{1}} \otimes g, id_{\underline{1} \otimes Y})]$ sont égales est équivalent à écrire qu'il existe deux isomorphismes $u : X \otimes C \to Y \otimes D$, $v : X \otimes C \to Y \otimes D$ dans $\underline{C}$ tels que soit commutatif dans $(\underline{C}^{is} \times \underline{C}^{is})^{\varphi}$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\underline{1} \otimes (X \otimes C), \underline{1} \otimes (X \otimes C)) \arrow[r, "(a, a)"] \arrow[d, "(id \otimes u, id \otimes u)"'] & ((\underline{1} \otimes X) \otimes C, (\underline{1} \otimes X) \otimes C) \arrow[r, "((id \otimes f) \otimes id, id)"] & ((\underline{1} \otimes X) \otimes C, (\underline{1} \otimes X) \otimes C) \\
(\underline{1} \otimes (Y \otimes D), \underline{1} \otimes (Y \otimes D)) \arrow[d, "(a, a)"'] & & (\underline{1} \otimes (X \otimes C), \underline{1} \otimes (X \otimes C)) \arrow[u, "(a, a)"'] \\
((\underline{1} \otimes Y) \otimes D, (\underline{1} \otimes Y) \otimes D) \arrow[r, "((id \otimes g) \otimes id, id)"] & ((\underline{1} \otimes Y) \otimes D, (\underline{1} \otimes Y) \otimes D) & (\underline{1} \otimes (Y \otimes D), \underline{1} \otimes (Y \otimes D)) \arrow[l, "(a, a)"'] \arrow[u, "(id \otimes v, id \otimes v)"']
\end{tikzcd}$$

Or la commutativité de ce dernier dans $(\underline{C}^{is} \times \underline{C}^{is})^{\varphi}$ est équivalente à celle du du diagramme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(X\otimes C,\ X\otimes C) \arrow[r, "(f\otimes id_C,\ id_{X\otimes C})"] \arrow[d, "(u,u)"'] & (X\otimes C,\ X\otimes C) \arrow[d, "(v,v)"] \\
(Y\otimes D,\ Y\otimes D) \arrow[r, "(g\otimes id_D,\ id_{Y\otimes D})"] & (Y\otimes D,\ Y\otimes D)
\end{tikzcd} \tag{14}$$

dans $(\underline{C}^{is} \times \underline{C}^{is})^{\mathcal{G}}$ compte tenu de la fonctorialité de la contrainte d'associativité $(a, a)$ et du fait que $(\underline{1}, \underline{1})$ est régulier.

Cela étant, en vertu de la composition des flèches dans $Pic(\underline{C})$ (§1, n°2, Prop. 9)

$$(15) \qquad \overline{(X, f)} + \overline{(Y, g)} = \overline{(X\otimes Y,\ f\otimes g)}$$

et au cas où $Y = X$

$$(16) \qquad \overline{(X, f)} + \overline{(X, g)} = \overline{(X, fg)}$$

<u>Remarque</u>. – Dire que le diagramme (14) est commutatif dans $(\underline{C}^{is} \times \underline{C}^{is})^{\mathcal{G}}$ est dire que si l'on pose

$$(U, u) = (g\otimes id,\ id)(u, u) \quad ; \quad (V, v) = (v, v)(f\otimes id,\ id)$$

on doit pouvoir décomposer $(U, u)$, $(V, v)$ en des produits (§1, n°1, Rem.)

$$(U, u) = (U_1 U_2 \cdots U_p,\ u_1 u_2 \cdots u_p)$$

$$(V, v) = (V_1 V_2 \cdots V_q,\ v_1 v_2 \cdots v_q)$$

tels que

$$(U_1, u_1)(\varepsilon_1, \varepsilon_1)(U_2, u_2)(\varepsilon_2, \varepsilon_2) \cdots (\varepsilon_{p-1}, \varepsilon_{p-1})(U_p, u_p) =$$

$$(V_1, v_1)(\zeta_1, \zeta_1)(V_2, v_2)(\zeta_2, \zeta_2) \cdots (\zeta_{q-1}, \zeta_{q-1})(V_q, v_q)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots, \varepsilon_{p-1}, \zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{q-1}$ appartenant à la partie multiplicative $\mathcal{S}$ de

$\underline{C}^{is}$ engendrée par les automorphismes de la forme $c_{X,X}$, $X \in Ob\,\underline{C}$. On obtient donc dans $\underline{C}^{is} \times \underline{C}^{is}$ la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes C, X\otimes C) \arrow[rr, "((v_1\zeta_1\cdots\zeta_{q-1}v_q)^{-1}(V_1\zeta_1\cdots\zeta_{q-1}V_q){,}\,id)"] \arrow[d, "(u_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}u_p{,}\,u_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}u_p)"'] & & (X\otimes C, X\otimes C) \arrow[d, "(v_1\zeta_1\cdots\zeta_{q-1}v_q{,}\,v_1\zeta_1\cdots\zeta_{q-1}v_q)"] \\
(Y\otimes D, Y\otimes D) \arrow[rr, "((U_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}U_p)(u_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}u_p)^{-1}{,}\,id)"'] & & (Y\otimes D, Y\otimes D)
\end{tikzcd}$$

ce qui implique la commutativité du diagramme suivant dans $\underline{C}^{is}$

$$\begin{tikzcd}
X\otimes C \arrow[r, "(v_1\zeta_1\cdots\zeta_{q-1}v_q)^{-1}(V_1\zeta_1\cdots\zeta_{q-1}V_q)"] \arrow[d, "u_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}u_p"'] & X\otimes C \arrow[d, "v_1\zeta_1\cdots\zeta_{q-1}v_q"] \\
Y\otimes D \arrow[r, "(U_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}U_p)(u_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}u_p)^{-1}"'] & Y\otimes D
\end{tikzcd}$$

où

$$u = u_1 \cdots u_p \;,\quad v = v_1 \cdots v_q$$

$$(g\otimes id)\, u = U_1 \cdots U_p \;,\quad v(f\otimes id) = V_1 \cdots V_q$$

$$u_1\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{p-1} u_p = v_1 \zeta_1 \cdots \zeta_{q-1} v_q$$

$$U_1\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{p-1} U_p = V_1 \zeta_1 \cdots \zeta_{q-1} V_q$$

## §3. Applications

### 1. Groupe de Grothendieck et groupe de Whitehead.

R étant un anneau unitaire, on rappelle les définitions suivantes [1].

<u>Définition 1</u>.– On appelle <u>groupe de Grothendieck</u> des R-modules projectifs à gauche de type fini le groupe abélien $K_0(R)$ engendré par les $[X]$, $X$ étant un R-module projectif à gauche de type fini et les générateurs $[X]$ satisfaisant à la relation

~~(17)~~ (1)
$$[X] = [X'] + [X'']$$

si le R-module $X$ est isomorphe à la somme directe $X' \oplus X''$.

<u>Définition 2</u>.– On appelle <u>groupe de Whitehead</u> de R le groupe abélien $K_1(R)$ engendré par les $[(X, f)]$ ; où $X$ est R-module projectif à gauche de type fini, $f : X \xrightarrow{\sim} X$ un automorphism de R-module ; les relations entre les générateurs étant

~~(18)~~ (2)
$$[(X, fg)] = [(X, f)] + [(X, g)]$$

et

~~(19)~~ (3)
$$[(X, f)] = [(X', f')] + [(X'', f'')]$$

s'il existe une suite exacte de R-modules

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{\theta} X'' \longrightarrow 0$$

telle que soit commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f"] & X'' \arrow[d, "f''"] \\ X' \arrow[r, "\sigma"] & X \arrow[r, "\theta"] & X'' \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{P}(R)$ la catégorie des R-modules projectifs à gauche de type fini. La catégorie $\mathcal{P}(R)$ munie de la loi $\oplus$ de somme directe et des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité naturelles est évidemment une $\oplus$-catégorie ACU. Posons $\underline{P} = \mathrm{Pic}(\mathcal{P}(R))$. Nous avons les propositions suivantes :

<u>Proposition 1</u>.- $\pi_0(\underline{P}) \simeq K_0(R)$.

<u>Démonstration</u>.- Tout d'abord remarquons qu'on a, en appliquant la formule (17) (1)

$$[X] = [X] + [0]$$

pour tout $X \in \mathcal{P}(R)$, et

$$[X] = [Y]$$

si $X$ est isomorphe à $Y$. Ensuite soit

$$(X_1, X_2) \xrightarrow{[A,B,(u_1,u_2)]} (Y_1, Y_2)$$

un isomorphisme dans $\underline{P}$, ce qui veut dire qu'on a deux $R$-isomorphismes

$$u_1 : X_1 \oplus A \longrightarrow Y_1 \oplus B \ ; \ u_2 : X_2 \oplus A \longrightarrow Y_2 \oplus B$$

On en conclut

$$[X_1] + [A] = [Y_1] + [B], \ [X_2] + [A] = [Y_2] + [B]$$

ou

$$[X_1] - [X_2] = [Y_1] - [Y_2]$$

Donc on obtient une application $i_0$ de $\pi_0(\underline{P})$ dans $K_0(R)$ définie par

$$i_0 : \overline{(X_1, X_2)} \longmapsto [X_1] - [X_2]$$

De plus, en vertu des relations (13) et (17) du (§2, n° 2) et (1)

$$\overline{(X_1, X_2)} + \overline{(Y_1, Y_2)} = \overline{(X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2)} \overset{i_0}{\longmapsto} [X_1 \oplus Y_1] - [X_2 \oplus Y_2] = [X_1] + [Y_1] - [X_2] - [Y_2] =$$

$$= [X_1] - [X_2] + ([Y_1] - [Y_2])$$

ce qui nous permet de conclure que l'application $i_0$ est un homomorphisme de groupes. D'autre part, considérons l'application de l'ensemble des générateurs de $K_0(R)$ dans $\pi_0(\underline{P})$ définie par

$$[X] \longmapsto \overline{(X,0)}$$

Pour $[X] = [X_1] + [X_2]$, i.e $X \cong X_1 \oplus X_2$, nous avons

$$\overline{(X,0)} = \overline{(X_1 \oplus X_2, 0)} = \overline{(X_1,0)} + \overline{(X_2,0)}$$

Donc l'application considérée définit un homomorphisme $j_0$ du groupe $K_0(R)$ dans le groupe $\pi_0(\underline{P})$. Il est clair que les deux homomorphismes $i_0$ et $j_0$ qu'on vient de construire sont inverses l'un de l'autre. On en déduit $\pi_0(\underline{P}) \simeq K_0(R)$. Les isomorphismes $i_0$ et $j_0$ sont appelés les <u>isomorphismes canoniques</u>.

<u>Proposition 2</u>.– $\pi_1(\underline{P}) \simeq K_1(R)$.

<u>Démonstration</u>.– Remarquons d'abord que pour tout $[(X,f)]$ on a :

$$[(X,f)] = [(X,f)] + [(0,id)]$$

$$[(X,id)] + [(X,f)] = [(X,f)]$$

$$[(X,f)] + [(X,f^{-1})] = [(X,id)]$$

compte tenu des relations $\overset{(2)}{\cancel{(18)}}$ et $\overset{(3)}{\cancel{(19)}}$. On en conclut que $[(0,id)] = [(X,id)]$ est le zéro du groupe $K_1(R)$ et $[(X,f^{-1})]$ est l'opposé de $[(X,f)]$. La relation $\overset{(3)}{\cancel{(18)}}$ donne aussi

$$[(X,f)] = [(Y,g)] + [(0,id)] = [(Y,g)]$$

s'il existe un R-isomorphisme $u : X \to Y$ tel que soit commutatif le le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

Ensuite considérons trois isomorphismes dans $\mathcal{P}(R)$

$$X \xrightarrow{f_1} Y \qquad Y \xrightarrow{g} Y \qquad Y \xrightarrow{f_2} X$$

Puisque le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_1^{-1} g f_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f_1"] & Y \end{tikzcd}$$

est commutatif, on a

$$[(Y, g)] = [(X, f_1^{-1} g f_1)]$$

D'autre part, on a

$$f_2 g f_1 = f_2 f_1 f_1^{-1} g f_1$$

ce qui donne en vertu de ~~(18)~~ (2)

$$[(X, f_2 g f_1)] = [(X, f_2 f_1)] + [(X, f_1^{-1} g f_1)] = [(X, f_2 f_1)] + [(Y, g)]$$

Plus généralement, soient

$$X \xrightarrow{W_n} Y_{n-1},\ Y_{n-1} \xrightarrow{\Psi_{n-1}} Y_{n-1},\ Y_{n-1} \xrightarrow{W_{n-1}} Y_{n-2},\ Y_{n-2} \xrightarrow{\Psi_{n-2}} Y_{n-2}, \dots\ Y_1 \xrightarrow{\Psi_1} Y_1,\ Y_1 \xrightarrow{W_1} X$$

des isomorphismes dans $\mathcal{P}(R)$. On obtient de proche en proche

$$[(X, W_1 \Psi_1 \dots \Psi_{n-2} W_{n-1} \Psi_{n-1} W_n)] = [(X, W_1 \Psi_1 \dots \Psi_{n-2} W_{n-1} W_n)] + [(Y_{n-1}, \Psi_{n-1})] =$$

$$= \dots\dots [(X, W_1 W_2 \dots W_n)] + [(Y_1, \Psi_1)] + [(Y_2, \Psi_2)] + \dots [(Y_{n-1}, \Psi_{n-1})]$$

Ces remarques faites, soient $(\overline{X,f}), (\overline{Y,g}) \in \pi_1(\mathcal{P})$ tels que $(\overline{X,f}) = (\overline{Y,g})$, ce qui veut dire qu'il existe $C, D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{P}(R)$ et deux isomorphismes de $R$-modules

$$u : X \oplus C \to Y \oplus D$$

$$v : X \oplus C \to Y \oplus D$$

tels que soit commutatif dans $\mathcal{P}(R)$ le diagramme (§2, n°2, Rem.)

$$\begin{tikzcd}
X \oplus C \arrow[rr, "(v_1\zeta_1\cdots\zeta_{q-1}v_q)^{-1}(V_1\zeta_1\cdots\zeta_{q-1}V_q)"] \arrow[d, "u_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}u_p"'] & & X \oplus C \arrow[d, "v_1\zeta_1\cdots\zeta_{q-1}v_q"] \\
Y \oplus D \arrow[rr, "(U_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}U_p)(u_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-1}u_p)^{-1}"'] & & Y \oplus D
\end{tikzcd}$$

où

$$u = u_1 \cdots u_p\,, \quad v = v_1 \cdots v_q$$

$$(g \oplus id)\,u = U_1 \cdots U_p\,, \quad v(f \oplus id) = V_1 \cdots V_q$$

$$u_1\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{p-1} u_p = v_1 \zeta_1 \cdots \zeta_{q-1} v_q$$

$$U_1\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{p-1} U_p = V_1 \zeta_1 \cdots \zeta_{q-1} V_q$$

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}, \zeta_1, \ldots, \zeta_{q-1} \in \mathcal{S}$$

$\mathcal{S}$ étant la partie multiplicative de $\mathcal{P}(R)^{is}$ engendrée par les endomorphismes de la forme

$$c_{X,X} : X \oplus X \longrightarrow X \oplus X$$
$$(a,b) \longmapsto (b,a)$$

$X \in \mathcal{P}(R)$.

En vertu des remarques faites au début de la démonstration et des relations $\overset{(2)}{(18)}$, $\overset{(3)}{(19)}$ nous obtenons

$$[(X,f)] = [(X,f)] + [(C,id)] = [(X \oplus C, f \oplus id)] =$$

$$= [(X \oplus C, (v_1\zeta_1 \cdots \zeta_{q-1} v_q)^{-1}(V_1\zeta_1 \cdots \zeta_{q-1} V_q))] =$$

$$= [(Y \oplus D, (U_1 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{p-1} U_p)(u_1 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{p-1} u_p)^{-1})] = [(Y,g)] + [(D, id)] = [(Y,g)]$$

On en déduit une application $i_1$ de $\Pi_1(\underline{P})$ dans $K_1(R)$

$$i_1 : \overline{(X,f)} \longmapsto [(X,f)]$$

Elle est aussi un homomorphisme de groupe, compte tenu de $\overbrace{(15)}^{\text{du } (\S 2, n^\circ 2)}$ et (17)[1]. Définissons maintenant une application $j_1$ de l'ensemble des générateurs de $K_1(R)$ dans $\Pi_1(\underline{P})$ par

$$j_1 : [(X,f)] \longmapsto \overline{(X,f)}$$

En vertu de la formule $\overbrace{(16)}^{\text{du } (\S 2, n^\circ 2)}$, nous avons

$$[(X,f)] + [(X,g)] = [(X,fg)] \xrightarrow{j_1} \overline{(X,fg)} = \overline{(X,f)} + \overline{(X,g)}$$

ce qui veut dire que les images par $j_1$ des générateurs de $K_1(R)$ respectent la relation (18)[2]. Reste la relation (19)[3] à considérer. Soit

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\sigma} & X & \xrightarrow{\theta} & X'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\
0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\sigma} & X & \xrightarrow{\theta} & X'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

un diagramme commutatif dans $\mathcal{P}(R)$ où les lignes sont exactes et $f', f$, $f''$ des automorphismes. Puisque $X''$ est projectif, il existe des homomorphismes de $R$-modules $\sigma' : X \longrightarrow X'$, $\theta' : X'' \longrightarrow X$ tels que

(20) (4) $\qquad \sigma'\sigma = id_{X'}, \quad \theta\theta' = id_{X''}, \quad \sigma\sigma' + \theta'\theta = id_X$

D'autre part les homomorphismes de $R$-modules

$$x \longmapsto (\sigma' x, \theta x), \quad (x', x'') \longmapsto \sigma x' + \theta' x''$$

de $X$ dans $X' \oplus X''$ et de $X' \oplus X''$ dans $X$ sont inverses l'un de l'autre. $X$ et $X' \oplus X''$ sont donc isomorphes par ces isomorphismes. De plus, moyennant les relations (20)[4], on vérifie aussitôt que le diagramme

$$(21)\,(5)\qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\begin{pmatrix}\sigma' \\ \theta\end{pmatrix}} & X'\oplus X'' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f''\end{pmatrix}} \\ X & \xrightarrow{\begin{pmatrix}\sigma' \\ \theta\end{pmatrix}} & X'\oplus X'' \end{array}$$

est commutatif, où

$$\begin{pmatrix}\sigma' \\ \theta\end{pmatrix} : X \longrightarrow X'\oplus X''$$
$$x \longmapsto (\sigma' x, \theta x)$$

$$\begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f''\end{pmatrix} : X'\oplus X'' \longrightarrow X'\oplus X''$$
$$(x', x'') \longmapsto (f'x' + \sigma' f \theta' x'', f'' x'')$$

ce qui implique que

$$\begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f''\end{pmatrix}$$

est un isomorphisme. La commutativité du diagramme (21)(5) nous donne (§2, n°2, Diag (14)),

$$\overline{(X, f)} = \overline{\left( X'\oplus X'', \begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f''\end{pmatrix}\right)}$$

Or

$$\begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & f''\end{pmatrix}\begin{pmatrix} id_{X'} & f'^{-1}\sigma' f \theta' \\ 0 & id_{X''}\end{pmatrix}$$

Donc en vertu des formules (15) et (16) du (§2, n°2)

$$\overline{(X, f)} = \overline{\left( X'\oplus X'', \begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f''\end{pmatrix}\right)} = \overline{\left( X'\oplus X'', \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & f''\end{pmatrix}\right)} + \overline{\left( X'\oplus X'', \begin{pmatrix} id_{X'} & f'^{-1}\sigma' f \theta' \\ 0 & id_{X''}\end{pmatrix}\right)}$$

$$= \overline{(X',f')} + \overline{(X'',f'')} + \overline{\left(X'\oplus X'', \begin{pmatrix} id_{X'} & f'^{-1}\sigma' f\theta' \\ 0 & id_{X''}\end{pmatrix}\right)}$$

Prouvons que

$$\overline{\left(X'\oplus X'', \begin{pmatrix} id_{X'} & f'^{-1}\sigma' f\theta' \\ 0 & id_{X''}\end{pmatrix}\right)} = \overline{\left(X'\oplus X'', \begin{pmatrix} id_{X'} & 0 \\ 0 & id_{X''}\end{pmatrix}\right)}$$

ou plus généralement

$$\overline{\left(X'\oplus X'', \begin{pmatrix} id_{X'} & h \\ 0 & id_{X''}\end{pmatrix}\right)} = \overline{\left(X'\oplus X'', \begin{pmatrix} id_{X'} & 0 \\ 0 & id_{X''}\end{pmatrix}\right)}$$

où $h : X'' \longrightarrow X'$ est un homomorphisme de R-modules quelconque (remarquons que bien que $h$ soit quelconque,

$$\begin{pmatrix} id_{X'} & h \\ 0 & id_{X''}\end{pmatrix} : X'\oplus X'' \longrightarrow X'\oplus X''$$

est un automorphisme de R-module, son inverse étant $\begin{pmatrix} id_{X'} & -h \\ 0 & id_{X''}\end{pmatrix}$).

Pour cela nous devons trouver des R-modules $C, D \in \mathcal{P}(R)$ et des isomorphismes de R-modules

$$u : (X'\oplus X'')\oplus C \longrightarrow (X'\oplus X'')\oplus D$$

$$v : (X'\oplus X'')\oplus C \longrightarrow (X'\oplus X'')\oplus D$$

tels que soit commutatif dans $\left(\mathcal{P}(R)^{is}\times\mathcal{P}(R)^{is}\right)^{\mathcal{S}}$ le diagramme

(3.5) (6)

$$\begin{tikzcd}
((X'\oplus X'')\oplus C, (X'\oplus X'')\oplus C) \arrow[r, "\left(\begin{pmatrix} id_{X'} & h \\ 0 & id_{X''}\end{pmatrix}\oplus id_C,\, id\right)"] \arrow[d, "{(u,u)}"'] & ((X'\oplus X'')\oplus C, (X'\oplus X'')\oplus C) \arrow[d, "{(v,v)}"] \\
((X'\oplus X'')\oplus D, (X'\oplus X'')\oplus D) \arrow[r, "{(id, id)}"] & ((X'\oplus X'')\oplus D, (X'\oplus X'')\oplus D)
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{S}$ étant la partie multiplicative de $\mathcal{P}(R)^{is}\times\mathcal{P}(R)^{is}$ engendrée par les endomorphismes de la forme $(c_{X,X}, c_{X,X})$, $X\in Ob\,\mathcal{P}(R)$, et

$$c_{X,X} : X \oplus X \longrightarrow X \oplus X$$
$$(a, b) \longmapsto (b, a)$$

Prenons $C = D = X''$ et

$$u : X' \oplus X'' \oplus X'' \longrightarrow X' \oplus X'' \oplus X''$$
$$(x', x'', x''_1) \longmapsto (x' + h(x'' + x''_1),\ x'' + x''_1,\ x''_1)$$

$$v : X' \oplus X'' \oplus X'' \longrightarrow X' \oplus X'' \oplus X''$$
$$(x', x'', x''_1) \longmapsto (x' + h x''_1,\ x'' + x''_1,\ x''_1)$$

On voit aussitôt que $u$ et $v$ sont des isomorphismes de R-modules. Pour montrer que le diagramme (G), où on a remplacé C et D par $X''$ et où $u, v$ sont définis de la manière ci-dessus, est commutatif dans $(\mathcal{P}(R)^{is} \times \mathcal{P}(R)^{is})^{g}$, nous décomposons l'identité $(id_{X' \oplus X'' \oplus X''}, id_{X' \oplus X'' \oplus X''})$ en le produit

$$(id_{X' \oplus X'' \oplus X''}, id_{X' \oplus X'' \oplus X''}) = (id_{X' \oplus X'' \oplus X''}, id_{X' \oplus X'' \oplus X''})(id, w)(id, w^{-1})$$

où

$$w = \begin{pmatrix} id_{X'} & h \\ 0 & id_{X''} \end{pmatrix} \oplus id_{X''} : X' \oplus X' \oplus X'' \longrightarrow X' \oplus X' \oplus X'' ;$$

ensuite nous définissons $(\varepsilon, \varepsilon) : (X' \oplus X'' \oplus X'',\ X' \oplus X'' \oplus X'') \longrightarrow (X' \oplus X'' \oplus X'',\ X' \oplus X'' \oplus X'')$ par

$$(\varepsilon, \varepsilon) = (id_{X'} \oplus c_{X'', X''}\ ;\ id_{X'} \oplus c_{X'', X''})\ ,\ \text{i.e.}\ \ \varepsilon(x', x'', x''_1) = (x', x''_1, x'')$$

Il est clair que $(\varepsilon, \varepsilon) \in \mathcal{S}$. Enfin la vérification de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
(X' \oplus X'' \oplus X'',\ X' \oplus X'' \oplus X'') \arrow[r, "{\left(\begin{pmatrix} id_{X'} & h \\ 0 & id_{X''} \end{pmatrix} \oplus id_{X''},\ id\right)}"] \arrow[d, "{(u,u)}"'] & (X' \oplus X'' \oplus X'',\ X' \oplus X'' \oplus X'') \arrow[d, "{(v,v)}"] \\
(X' \oplus X'' \oplus X'',\ X' \oplus X'' \oplus X'') \arrow[r, "{(id,id)(\varepsilon,\varepsilon)(id,w)(\varepsilon,\varepsilon)(id,w^{-1})}"] & (X' \oplus X'' \oplus X'',\ X' \oplus X'' \oplus X'')
\end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{P}(R)^{is} \times \mathcal{P}(R)^{is}$ est immédiate, ce qui prouve que $(\mathcal{G})$ est commutatif dans $\left(\mathcal{P}(R)^{is} \times \mathcal{P}(R)^{is}\right)^{\varphi}$, et par suite (§2, n°2) :

$$\text{~~(23)~~ (7)} \qquad \overline{\left(X' \oplus X'', \begin{pmatrix} id_{X'} & h \\ 0 & id_{X''} \end{pmatrix}\right)} = \overline{(X' \oplus X'', id)}$$

Puisque $\overline{(X, id_X)}$ est le zéro du groupe $\pi_1(\underline{P})$ pour tout $X \in Ob\, \mathcal{P}(R)$, ce qu'on peut vérifier aussitôt, on peut donc écrire en vertu de la relation ~~(23)~~ (7)

$$[(X', f')] + [(X'', f'')] = [(X, f)] \longmapsto \overline{(X, f)} = \overline{(X', f')} + \overline{(X'', f'')} + \overline{\left(X' \oplus X'', \begin{pmatrix} id_{X'} & f'^{-1} \sigma' f \theta' \\ 0 & id_{X''} \end{pmatrix}\right)}$$

$$= \overline{(X', f')} + \overline{(X'', f'')} + \overline{(X' \oplus X'', id)}$$

$$= \overline{(X', f')} + \overline{(X'', f'')}$$

i.e les images par $j_1$ des générateurs de $K_1(R)$ respectent aussi la relation ~~(19)~~ (3). $j_1$ définit donc un homomorphisme noté aussi $j_1$ du groupe $K_1(R)$ dans le groupe $\pi_1(\underline{P})$. On vérifie aussitôt que $i_1$ et $j_1$ sont inverses l'un de l'autre, on les appelle les <u>isomorphismes canoniques</u>. La proposition est ainsi démontrée.

## <u>2. Catégorie de suspension.</u>

Soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU, $S : \underline{C} \to \underline{C}$ un foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}$. On se propose de chercher une catégorie $\underline{\mathcal{P}}$, un foncteur $i$ de $\underline{C}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$ et un foncteur $p$ de $\underline{\mathcal{P}}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$ tels que le triple $(\underline{\mathcal{P}}, i, p)$ possède les propriétés suivantes :

1° $p$ est une équivalence de catégorie et $iS \simeq pi$.

2° Pour tout triple $(\underline{Q}, j, q)$ ayant la propriété 1°, il existe un foncteur $f$ et un seul (défini à isomorphisme fonctoriel près) de $\underline{\mathcal{P}}$ dans $\underline{Q}$ tel que $fi \simeq j$, $fp \simeq qf$.

<u>Proposition 3.</u> — Le triple $(\underline{\mathcal{P}}, i, p)$ existe.

<u>Démonstration</u>. — Soient N l'ensemble des entiers naturels, $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, $m, n \in N$. On note $\phi((X,m),(Y,n))$ l'ensemble suivant

$$\phi((X,m),(Y,n)) = \{(a,b,u) \mid a,b \in N,\ a+m = b+n,\ u \in \mathrm{Fl}\,\underline{C},\ u : S^a X \to S^b Y\}.$$

où $S^a X = \underbrace{S(\dots\ (S(SX))\dots)}_{a \text{ fois}}$ et $S^0 X = X$. Soit $R_{(X,m),(Y,n)}$ une relation binaire dans $\phi((X,m),(Y,n))$ définie de façon suivante :

$$(a,b,u)\ R_{(X,m),(Y,n)}\ (a_1,b_1,u_1)$$

si et seulement s'il existe $c, c_1 \in N$ tels que $a+c = a_1+c_1$ (ce qui implique $b+c = b_1+c_1$) et $S^c u = S^{c_1} u_1$. On vérifie aussitôt que c'est une relation d'équivalence. On note $\langle a,b,u\rangle$ la classe d'équivalence de $(a,b,u)$.

Soient $\langle a,b,u\rangle \in \phi_{(X,\ell),(Y,m)} / R_{(X,\ell),(Y,m)}$,

$\langle c,d,v\rangle \in \phi_{(Y,m),(Z,n)} / R_{(Y,m),(Z,n)}$, on peut vérifier que la classe d'équivalence

$$\langle a+c,\ b+d,\ S^b(v)\,S^c(u)\rangle \in \phi_{(X,\ell),(Z,n)} / R_{(X,\ell),(Z,n)}$$

ne dépend pas des représentants $(a,b,u)$, $(c,d,v)$. On l'appelle <u>composé</u> des classes $\langle a,b,u\rangle$, $\langle c,d,v\rangle$, et on la note

$$\langle c,d,v\rangle\ \langle a,b,u\rangle = \langle a+c,\ b+d,\ S^b(v)\ S^c(u)\rangle$$

Il est clair que

$$\langle b,c,v\rangle\ \langle a,b,u\rangle = \langle a,c,vu\rangle$$

et par suite on voit aussitôt l'associativité du produit des classes ainsi défini. Cela étant, définissons la catégorie $\underline{\mathcal{P}}$ par

$$\mathrm{Ob}\,\underline{\mathcal{P}} = \{(X,m) \mid X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C},\ m \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{P}}}((X,m),(Y,n)) = \Phi((X,m),(Y,n)) \,/\, R_{(X,m),(Y,n)}$$

la loi de composition des flèches de $\underline{\mathcal{P}}$ étant le produit des classes défini ci-dessus. Ensuite on définit le foncteur $i$ par

$$i : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathcal{P}}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & (X,0) \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \langle 0,0,u\rangle} \\ Y & \longmapsto & (Y,0) \end{array}$$

et le foncteur $p$ par

$$p : \underline{\mathcal{P}} \longrightarrow \underline{\mathcal{P}}$$

$$\begin{array}{ccc} (X,m) & \longmapsto & (SX,m) \\ {\scriptstyle \langle a,b,u\rangle}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \langle a,b,Su\rangle} \\ (Y,n) & \longmapsto & (SY,n) \end{array}$$

Il est clair que $p\langle a,b,u\rangle$ ne dépend pas du représentant $(a,b,u)$. Soit $\tilde{p}$ un autre foncteur de $\underline{\mathcal{P}}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$ défini par

$$\tilde{p} : \underline{\mathcal{P}} \longrightarrow \underline{\mathcal{P}}$$

$$\begin{array}{ccc} (X,m) & \longmapsto & (X,m+1) \\ {\scriptstyle \langle a,b,u\rangle}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \langle a,b,u\rangle} \\ (Y,n) & \longmapsto & (Y,n+1) \end{array}$$

On vérifie aussitôt que

$$\tilde{p}\,p = p\,\tilde{p} \xrightarrow[\sim]{\xi} \mathrm{id}_{\underline{\mathcal{P}}}\ ,\quad \xi_{(X,m)} = [0,1,\mathrm{id}_{SX}] \text{ pour tout } (X,m) \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathcal{P}}.$$

ce qui montre que $p$ est une équivalence de catégorie. Enfin la définition des foncteurs $i, p$ donne $iS = pi$. Le triple $(\underline{P}, i, p)$ vérifie donc la propriété 1°.

Soit $(\underline{Q}, j, q)$ un autre triple vérifiant la propriété 1°, i.e il existe des isomorphismes fonctoriels $\beta, \eta, \xi$ tels que

$$jS \xrightarrow[\sim]{\beta} qj \;,\; \tilde{q}q \xrightarrow[\sim]{\eta} id_{\underline{Q}} \;,\; q\tilde{q} \xrightarrow[\sim]{\xi} id_{\underline{Q}}$$

$\tilde{q}$ étant un quasi-inverse de $q$. Ces isomorphismes fonctoriels nous donnent l'isomorphisme composé

$$\tilde{q}jS \xrightarrow[\sim]{\tilde{q}*\beta} \tilde{q}qj \xrightarrow[\sim]{\eta * j} j \quad ,$$

par suite nous pouvons définir un foncteur $f$ de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ de façon suivante

$$f : \underline{P} \longrightarrow \underline{Q}$$

$$\begin{array}{ccc} (X,m) & \longmapsto & \tilde{q}^m jX \\ {\scriptstyle \langle a,b,u\rangle}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f\langle a,b,u\rangle} \\ (Y,n) & \longmapsto & \tilde{q}^n jY \end{array}$$

$f\langle a,b,u\rangle$ étant défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \tilde{q}^m jX \arrow[d, "f\langle a,b,u\rangle"'] & \tilde{q}^{m+1} jSX \arrow[l, "\tilde{q}^m(\eta_{jX}\circ\tilde{q}(\beta_X^{-1}))"'] & \tilde{q}^{m+2} jS^2X \ldots \arrow[l, "\tilde{q}^{m+1}(\eta_{jSX}\circ\tilde{q}(\beta_{SX}^{-1}))"'] & \tilde{q}^{m+a} jS^aX \arrow[l] \arrow[d, "\tilde{q}^{m+a} ju"] \\ \tilde{q}^n jY & \tilde{q}^{n+1} jSY \arrow[l, "\tilde{q}^n(\eta_{jY}\circ\tilde{q}(\beta_Y^{-1}))"'] & \tilde{q}^{n+2} jS^2Y \ldots \arrow[l, "\tilde{q}^{n+1}(\eta_{jSY}\circ\tilde{q}(\beta_{SY}^{-1}))"'] & \tilde{q}^{n+b} jS^bY \arrow[l] \end{tikzcd} \quad (\cancel{24})(8)$$

Prouvons que $f\langle a,b,u\rangle$ ne dépend pas du représentant $(a,b,u)$. Soit donc un autre triple $(a_1, b_1, u_1)$ tel que $\langle a_1, b_1, u_1\rangle = \langle a,b,u\rangle$. Il existe alors $c, c_1 \in \mathbb{N}$ tels que $a+c = a_1+c_1$ et $S^c(u) = S^{c_1}(u_1)$. Le diagramme commutatif $\cancel{(24)}$ (8) nous permet de conclure la commutativité du diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
\tilde q^{m} j X \arrow[r, "f\langle a,b,u\rangle"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[ddddd, bend right=60, "id"'] & \tilde q^{n} j Y \arrow[d, "\cong"] \arrow[ddddd, bend left=60, "id"] \\
\tilde q^{m+a} j S^{a} X \arrow[r, "\tilde q^{m+a} j u"] \arrow[d, "\cong"'] & \tilde q^{n+b} j S^{b} Y \arrow[d, "\cong"] \\
\tilde q^{m+a+c} j S^{a+c} X \arrow[r, "\tilde q^{m+a+c} j S^{c} u"] \arrow[d, equal] & \tilde q^{m+b+c} j S^{b+c} Y \arrow[d, equal] \\
\tilde q^{m+a_1+c_1} j S^{a_1+c_1} X \arrow[r, "\tilde q^{m+a_1+c_1} j S^{c_1} u_1"] \arrow[d, "\cong"'] & \tilde q^{n+b_1+c_1} j S^{b_1+c_1} Y \arrow[d, "\cong"] \\
\tilde q^{m+a_1} j S^{a_1} X \arrow[r, "\tilde q^{m+a_1} j u_1"] \arrow[d, "\cong"'] & \tilde q^{n+b_1} j S^{b_1} Y \arrow[d, "\cong"] \\
\tilde q^{m} j X \arrow[r, "f\langle a_1,b_1,u_1\rangle"] & \tilde q^{n} j Y
\end{tikzcd}
$$

ce qui donne $f\langle a,b,u\rangle = f\langle a_1,b_1,u_1\rangle$. Le foncteur $f$ ainsi défini, on vérifie aussitôt que $fi = j$. De plus, au moyen des isomorphismes fonctoriels $\beta, \gamma, \zeta$ nous avons le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
qf(X,m) \arrow[r, "qf\langle a,b,u\rangle"] \arrow[d, equal] & qf(Y,n) \arrow[d, equal] \\
q\tilde q^{m} j X \arrow[d, "\cong"'] & q\tilde q^{n} j Y \arrow[d, "\cong"] \\
q\tilde q^{m+a} j S^{a} X \arrow[r, "q\tilde q^{m+a} j u"] \arrow[d, "\cong"'] & q\tilde q^{n+b} j S^{b} Y \arrow[d, "\cong"] \\
\tilde q^{m+a} q j S^{a} X \arrow[r, "\tilde q^{m+a} q j u"] \arrow[d, "\cong"'] & \tilde q^{n+b} q j S^{b} Y \arrow[d, "\cong"] \\
\tilde q^{m+a} j S^{a+1} X \arrow[r, "\tilde q^{m+a} j S u"] \arrow[d, "\cong"'] & \tilde q^{n+b} j S^{b+1} Y \arrow[d, "\cong"] \\
\tilde q^{m} j S X \arrow[r, "f\langle a,b,Su\rangle"] \arrow[d, equal] & \tilde q^{n} j S Y \arrow[d, equal] \\
fp(X,m) \arrow[r, "fp\langle a,b,u\rangle"] & fp(Y,n)
\end{tikzcd}
$$

i.e $qf \simeq fp$. Enfin prouvons que $f$ est unique (à isomorphisme fonctoriel près). Soit $g : \underline{P} \to \underline{Q}$ un autre foncteur tel que $gi \simeq j$ et $gp \simeq qg$. D'abord remarquons que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(X, m) \arrow[r, "{\langle a, 0, id_{S^a X} \rangle}"] \arrow[d, "{\langle a, b, u \rangle}"'] & (S^a X, a+m) \arrow[d, "{\langle 0, 0, u \rangle}"] \\
(Y, n) \arrow[r, "{\langle b, 0, id_{S^b Y} \rangle}"] & (S^b Y, b+n)
\end{tikzcd}$$

est commutatif pour $(X, m), (Y, n) \in Ob\ \underline{P}$, $\langle a, b, u \rangle \in Hom\ ((X, m), (Y, n))$. Ensuite au moyen des isomorphismes fonctoriels donnés, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
g(X, m) \arrow[r, "{g\langle a, 0, id \rangle}"] \arrow[d, "{g\langle a, b, u \rangle}"'] & g(S^a X, a+m) \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, "{g\langle 0, 0, u \rangle}"] & \tilde{q}^{a+m} q^{a+m} g(S^a X, a+ \ldots \arrow[d, "{\tilde{q}^{a+m} q^{a+m} g\langle 0, 0, u \rangle}"] \\
g(Y, n) \arrow[r, "{g\langle b, 0, id \rangle}"] & g(S^b Y, b+n) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \tilde{q}^{b+n} q^{b+n} g(S^b Y, b+ \ldots
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\tilde q^{a+m} g(S^a X, a+m) \arrow[d, "\tilde q^{a+m} g\langle 0,0,u\rangle"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \tilde q^{a+m} g p^{a+m}(S^a X, a+m) \arrow[d, "\tilde q^{a+m} g p^{a+m}\langle 0,0,u\rangle"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \tilde q^{a+m} g(S^{2a+m} X, a+m) \arrow[d, "\tilde q^{a+m} g\langle 0,0,S^{a+m}u\rangle"'] \arrow[r, "\tilde q^{a+m} g\langle 0,a+m,id\rangle"] & \tilde q^{a+m} g(S^a X, 0) \arrow[d, "\tilde q^{a+m} g\langle 0,0,u\rangle"'] \arrow[r, phantom, "="] & \tilde q^{a+m} g_* S^a X \arrow[d, "\tilde q^{a+m} g_* u"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \tilde q^{a+m} j_* S^a X \arrow[d, "\tilde q^{a+m} j_* u"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \tilde q^{m} j X = f(X,m) \arrow[d, "f\langle a,b,u\rangle"'] \\
\tilde q^{b+n} g(S^b Y, b+n) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \tilde q^{b+n} g p^{b+n}(S^b Y, b+n) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \tilde q^{b+n} g(S^{2b+n} Y, b+n) \arrow[r, "\tilde q^{a+m} g\langle 0,b+n,id\rangle"] & \tilde q^{b+n} g(S^b Y, 0) \arrow[r, phantom, "="] & \tilde q^{b+n} g_* S^b Y \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \tilde q^{b+n} j_* S^b Y \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \tilde q^{n} j Y = f(Y,n)
\end{tikzcd}
$$

ce qui permet de conclure que $g \simeq f$. L'assertion est ainsi démontrée.

Voici une autre variante du triple $(\underline{P}, i, p)$.

<u>Proposition 4</u>.– La catégorie $\underline{P}$ est équivalente à la catégorie $\underline{P}'$ définie de façon suivante

$$\mathrm{Ob}\,\underline{P}' = \{(X,m) \mid X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C},\ m \in Z\} \quad Z \text{ étant l'ensemble des entiers}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{P}'}((X,m),(Y,n)) = \varinjlim_{k \to \infty} \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(S^{k+m}X, S^{k+n}Y)$$

où $k$ part de la valeur $k_0$ définie par $k_0 + \min(m,n) = 0$.

<u>Démonstration</u>.– Pour $(X,m), (Y,n) \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}'$, notons par $\overline{(k,u)}$ la flèche $(X,m) \longrightarrow (Y,n)$ où $u : S^{k+m}X \longrightarrow S^{k+n}Y$. Ensuite considérons le foncteur $t$ de $\underline{P}$ dans $\underline{P}'$ défini de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} (X,m) & \longmapsto & t(X,m) = (X,-m) \\ {\scriptstyle \langle a,b,u\rangle}\big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle t\langle a,b,u\rangle = \overline{(a+m,u)}} \\ (Y,n) & \longmapsto & t(Y,n) = (Y,-n) \end{array}$$

On vérifie aussitôt que $t$ est un foncteur pleinement fidèle. De plus pour chaque objet $(X,m) \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}'$, on a

$$(X,m) = t(X,-m) \quad \text{si } m \leq 0$$

$$(X,m) \xrightarrow[\sim]{\overline{(0,\, id_{S^m X})}} (S^m X, 0) = t(S^m X, 0) \quad \text{si } m > 0$$

Par conséquent, $t$ est une équivalence. Enfin considérons le foncteur

$$p' : \underline{P}' \longrightarrow \underline{P}'$$

$$\begin{array}{ccc} (X,m) & \longmapsto & (SX,m) \\ {\scriptstyle \overline{(k,u)}}\big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \overline{(k,Su)}} \\ (Y,n) & \longmapsto & (SY,n) \end{array}$$

on obtient aussitôt $tp = p't$. On en conclut que le triple $(\underline{P}', i', p')$ avec $i' = ti$, est aussi une solution du problème posé.

Dans le cas où le foncteur S est défini par

$$X \longmapsto X \otimes Z$$

Z étant un objet quelconque de $\underline{C}$ différent de l'objet unité $\underline{1}$, on dit que :

<u>Définition 3.</u> - Le triple $(\underline{P}, i, n)$ est la <u>catégorie de suspension</u> de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ définie par l'objet Z. On retrouve la définition habituelle au cas où $\underline{C}$ est la catégorie homotopique pointée $\underline{Htp}_*$ munie du produit contracté $\wedge$, des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité naturelles ; et Z la 1-sphère $S^1$.

Dans tout ce qui suit du n°, $(\underline{P}, i, p)$ désigne la catégorie de suspension de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ définie par l'objet Z. Essayons de définir dans $\underline{P}$ une loi $\otimes$ et des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité de telle sorte que $\underline{P}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU, iZ inversible dans $\underline{P}$, et $i$ immergé dans un couple $(i, \breve{i})$ qui est un $\otimes$-foncteur de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ dans la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$ compatible avec les contraintes. La chose la plus naturelle est de poser

$$(X, m) \otimes (Y, n) = (X \otimes Y, m+n) \tag{9}$$

pour $(X,m), (Y,n) \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ ; et de définir $\langle a_1, b_1, u_1\rangle \otimes \langle a_2, b_2, u_2\rangle$ pour $\langle a_1, b_1, u_1\rangle : (X_1, m_1) \longrightarrow (Y_1, n_1)$, $\langle a_2, b_2, u_2\rangle : (X_2, m_2) \longrightarrow (Y_2, n_2)$ par le diagramme commutatif

$$
(10)\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
((\cdots(X_1\otimes Z_1)\otimes Z_2\cdots)\otimes Z_{a_1})\otimes((\cdots((X_2\otimes Z_{a_1+1})\otimes Z_{a_1+1})\cdots)\otimes Z_{a_1+a_2}) \arrow[r, "u_1\otimes u_2"] \arrow[d] & ((\cdots((Y_1\otimes Z_1)\otimes Z_2)\cdots)\otimes Z_{b_1})\otimes((\cdots((Y_2\otimes Z_{b_1+1})\otimes Z_{b_1+2})\cdots)\otimes Z_{b_1+b_2}) \arrow[d] \\
(\cdots(((\cdots((X_1\otimes X_2)\otimes Z_1)\cdots)\otimes Z_{a_1})\otimes Z_{a_1+1})\cdots)\otimes Z_{a_1+a_2} \arrow[r, "w"] & (\cdots(((\cdots((Y_1\otimes Y_2)\otimes Z_1)\cdots)\otimes Z_{b_1})\otimes Z_{b_1+1})\cdots)\otimes Z_{b_1+b_2}
\end{tikzcd}
$$

en posant

(11) $$\langle a_1, b_1, u_1\rangle \oplus \langle a_2, b_2, u_2\rangle = \langle a_1+a_2, b_1+b_2, w\rangle$$

les flèches verticales du diagramme (10) étant construites à l'aide des flèches d'associativité, de commutativité, d'identité ; et les $Z_i$ dans ce diagramme tous égaux à $Z$. Ici nous devons prouver que le produit tensoriel des flèches ainsi défini ne dépend pas des représentants $(a_1, b_1, u_1)$, $(a_2, b_2, u_2)$. Or l'exemple qui suit nous montre qu'il n'en est rien. Considérons le cas où $\underline{C}$ est la catégorie des R-modules munie de la loi $\oplus$ somme directe, R étant un anneau unitaire quelconque. Soient

$$\langle 1, 1, f_1\oplus g_1\rangle : (X_1, 0) \longrightarrow (Y_1, 0)$$

$$\langle 1, 1, f_2\oplus g_2\rangle : (X_2, 0) \longrightarrow (Y_2, 0)$$

Alors, en vertu de la formule (11)

$$\langle 1, 1, f_1\oplus g_1\rangle \oplus \langle 1, 1, f_2\oplus g_2\rangle = \langle 2, 2, w\rangle$$

avec $w$ défini par le diagramme commutatif (10), qui est ici l'homomorphisme de R-modules suivant

$$w : X_1\oplus X_2 \oplus Z \oplus Z \longrightarrow Y_1 \oplus Y_2 \oplus Z \oplus Z$$

$$(x_1, x_2, z_1, z_2) \longmapsto (f_1x_1, f_2x_2, g_1z_1, g_2z_2)$$

Or $\langle 1, 1, f_1\oplus g_1\rangle = \langle 2, 2, f_1\oplus g_1\oplus id_Z\rangle$ et $\langle 2, 2, f_1\oplus g_1\oplus id_Z\rangle \oplus$
$\oplus \langle 1, 1, f_2\oplus g_2\rangle = \langle 3, 3, \omega\rangle$ avec

$$\omega : X_1\oplus X_2 \oplus Z \oplus Z \oplus Z \longrightarrow Y_1\oplus Y_2 \oplus Z\oplus Z\oplus Z$$

$$(x_1, x_2, z_1, z_2, z_3) \longmapsto (f_1x_1, f_2x_2, g_1z_1, z_2, g_2z_3)$$

Regardons $\langle 2, 2, w\rangle$. Nous avons

$$\langle 2,2,w\rangle = \langle 3,3; w\oplus id_Z\rangle$$

où $w\oplus id_Z$ est l'homomorphisme

$$w\oplus id_Z : X_1\oplus X_2\oplus Z\oplus Z\oplus Z \longrightarrow Y_1\oplus Y_2\oplus Z\oplus Z\oplus Z$$

$$(x_1, x_2, z_1, z_2, z_3) \longmapsto (f_1x_1, f_2x_2, g_1z_1, g_2z_2, z_3)$$

Pour $Z\neq 0$ et $g_2\neq id_Z$, on a bien $w\oplus id_Z\neq \omega$, et par suite $\langle 3, 3, w\oplus id_Z\rangle \neq \langle 3,3,\omega\rangle$, ce qui montre que le produit tensoriel des flèches défini par (11) dépend des représentants $(a_1, b_1, u_1)$, $(a_2, b_2, u_2)$ dans le cas de la catégorie des R-modules munie de la loi $\oplus$ somme directe. On peut vérifier qu'il en est de même de la catégorie homotopique pointée $\underline{Htp}_*$ munie du produit contracté $\wedge$.

Revenons au cas général. L'exemple ci-dessous nous montre qu'on ne peut pas définir un produit tensoriel dans $\underline{P}$ par les formules (9) et (11) quand la flèche de symétrie canonique $c_{Z,Z}$ est différente de l'identité. Si nous supposons $c_{Z,Z} = id_{Z\otimes Z}$, alors nous pouvons vérifier que le produit tensoriel des flèches défini par la formule (11) ne dépend pas effectivement des représentants $(a_1,b_1,u_1)$ $(a_2, b_2, u_2)$, que la catégorie $\underline{P}$ munie de cette loi $\otimes$ est bien une $\otimes$-catégorie ACU avec les contraintes venant de façon naturelle des contraintes de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$, et enfin que $iZ$ est inversible dans $\underline{P}$ puisque le foncteur p est une équivalence. D'où la proposition :

<u>Proposition 5</u>.– Soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU : $(a, c, (\underline{1}, g, d))$, $Z$ un objet de $\underline{C}$, $\mathcal{L}$ la partie multiplicative de $\underline{C}$ engendrée par la flèche de symétrie canonique $c_{Z,Z}$, $\underline{C}^{\mathcal{L}}$ la $\otimes$-catégorie quotient de $\underline{C}$ définie par $\mathcal{L}$, munie de la contrainte ACU : $(\bar{a}, \bar{c}, (\underline{1}, \bar{g}, \bar{d}))$ (§1, n°1, Déf. 2 et Prop. 3), et $(\underline{P}, j, \pi)$ la catégorie de suspension de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}^{\mathcal{L}}$ définie par l'objet $Z$. Alors :

La catégorie $\underline{P}$ munie de la loi $\otimes$ définie par les formules (9) et (11), et des contraintes d'associativité $\langle 0, 0, \bar{a} \rangle$, de commutativité $\langle 0, 0, \bar{c} \rangle$, d'unité $((\underline{1}, 0), \langle 0, 0, \bar{g} \rangle, \langle 0, 0, \bar{d} \rangle)$ est une $\otimes$-catégorie ACU. Le couple $(j, \check{j} = id)$ est un $\otimes$-foncteur ACU et $jZ$ inversible dans $\underline{P}$.

<u>Remarque</u>.– Les hypothèses étant celles de la proposition 5 et $(\mathcal{P}, i, p)$ désignant toujours la catégorie de suspension de $\underline{C}$ définie par $Z$, on peut décrire la catégorie $\underline{P}$ de façon suivante :

$$\mathrm{Ob}\,\underline{P} = \mathrm{Ob}\,\underline{\mathcal{P}}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{P}}((X,m),(Y,n)) = \{ [a, b, u] \mid a, b \in \mathbb{N},\ a+m = b+n,\ u : S^a X \to S^b Y \}$$

où $[a_1, b_1, u_1] = [a_2, b_2, u_2]$ si et seulement s'il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ tels que $a_1 + c_1 = a_2 + c_2$ et $S^{c_1} u_1 = S^{c_2} u_2$ dans $\underline{C}^{\mathcal{L}}$ (pas dans $\underline{C}$ comme le cas de $\underline{\mathcal{P}}$, ce qui fait la différence de $\underline{P}$ avec $\underline{\mathcal{P}}$).

Soient $(H, \check{H})$ le $\otimes$-foncteur canonique de $\underline{C}$ dans $\underline{C}^{\mathcal{L}}$ (§1, n°1, Déf 2) et $(i, \check{i}) = (j, \check{j}) \circ (H, \check{H}) : \underline{C} \to \underline{P}$.

<u>Proposition 6</u>.– Il existe un foncteur $f$ unique (à isomorphisme,

fonctoriel près ) de $\underline{\mathcal{P}}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$ tel que $fi \simeq \iota$ et $fp \simeq \Pi f$. Le foncteur $f$ n'est pas fidèle quand la flèche de symétrie canonique $c_{Z,Z}$ est différente de l'identité $id_{Z \otimes Z}$.

Démonstration.- D'abord remarquons que le triple $(\underline{\mathcal{P}}, \iota, \Pi)$ vérifie la condition 1° du problème posé, i.e. $\iota S = \Pi\iota$ et $\Pi$ est une équivalence. Ensuite considérons le foncteur $f : \underline{\mathcal{P}} \longrightarrow \underline{\mathcal{P}}$ défini par

$$\begin{array}{ccc} (X,m) & \longmapsto & (X,m) \\ {\scriptstyle \langle a,b,u \rangle}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [a,b,u]} \\ (Y,n) & \longmapsto & (Y,n) \end{array}$$



On vérifie aussitôt que

$$fi = \iota \; ; \; fp = \Pi f \tag{14}$$

D'où l'unicité de $f$ définie à isomorphisme fonctoriel près (Prop. 3). La description de la catégorie $\underline{\mathcal{P}}$ dans la remarque ci-dessus nous montre immédiatement que le foncteur $f$ n'est pas fidèle pour $c_{Z,Z} \neq id_{Z\otimes Z}$.

Nous allons voir s'il est possible de munir la catégorie de suspension $\underline{\mathcal{P}}$ de $\underline{C}$ définie par $Z$ d'une loi $\otimes$ (définie autrement que par les formules (9) et (11) puisqu'on y a échoué) et des contraintes de telle sorte que $\underline{\mathcal{P}}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU, $iZ$ inversible dans $\underline{\mathcal{P}}$ et $i$ immergé dans un couple $(i, \breve{i})$ qui est un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$. Pour cela posons la définition suivante :

Définition 4.- Une sous-catégorie $\underline{A}$ d'une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ est

$\otimes$-stable si elle vérifie :

1° $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, $u_1 : A_1 \to B_1$, $u_2 : A_2 \to B_2 \in \mathrm{Fl}\,\underline{A} \Rightarrow$ $A_1 \otimes A_2 \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, $B_1 \otimes B_2 \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, $u_1 \otimes u_2 : A_1 \otimes A_2 \to B_1 \otimes B_2 \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$.

2° $\underline{1} \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, et $A \in \mathrm{Ob}\,\underline{A} \Rightarrow g_A, g_A^{-1}, d_A, d_A^{-1} \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$.

3° $A_1, A_2, A_3 \in \mathrm{Ob}\,\underline{A} \Rightarrow c_{A_1,A_2}, a_{A_1,A_2,A_3}, a^{-1}_{A_1,A_2,A_3} \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$.

$(a, c, (1, g, d))$ étant la contrainte ACU de $\underline{C}$.

Tout sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Ob}\,\underline{C}$ est contenu dans une sous-catégorie $\otimes$-stable $\underline{\mathcal{B}}$ telle que, si $\underline{A}$ est une sous-catégorie $\otimes$-stable et $\underline{A} \supset \mathcal{B}$, alors $\underline{A} \supset \underline{\mathcal{B}}$. $\underline{\mathcal{B}}$ est dite sous-catégorie $\otimes$-stable <u>engendrée</u> par $\mathcal{B}$. C'est un groupoïde dont les objets sont les produits tensoriels des objets appartenant à $\mathcal{B} \cup \{\underline{1}\}$, et dont les flèches sont les produits tensoriels des flèches de la forme $a, a^{-1}, c, c^{-1}, g, g^{-1}$, $d, d^{-1}$, id. La catégorie $\underline{\mathcal{B}}$ est évidemment une $\otimes$-catégorie ACU, la loi $\otimes$ et les contraintes de $\underline{\mathcal{B}}$ étant celles de $\underline{C}$.

Cela étant, revenons à notre problème. Soit $\underline{C}'$ la sous-catégorie $\otimes$-stable de $\underline{C}$ engendrée par $\{Z\}$. Les objets de $\underline{C}'$ sont donc les produits tensoriels des objets appartenant à $\{\underline{1}, Z\}$. Soit

$$(F, \breve{F}) : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$$

le $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}'$ dans $\underline{C}$ défini par

$$F X' = X', \quad \breve{F}_{X',Y'} = id_{X' \otimes Y'}$$

pour $X', Y' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$. Désignons par $\underline{P}$ la $\otimes$-catégorie de fractions de $\underline{C}$ définie par $(\underline{C}', (F, \breve{F}))$ et par $(\mathcal{D}, \breve{\mathcal{D}})$ le $\otimes$-foncteur canonique (§2, n°1, Déf. 1). En vertu de (§2, n°1) $\underline{P}$ est la catégorie suivante

$$\mathrm{Ob}\,\underline{P} = \{(X, X') \mid X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C},\ X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{P}}\big((X,X'),(Y,Y')\big) = \Big\{ \big[A', B', (u,u')\big] \mid A', B' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}' ; (u,u') : (X\otimes A', X'\otimes A') \longrightarrow (Y\otimes B', Y'\otimes B') \Big\}$$

où $[A'_1, B'_1, (u_1, u'_1)] = [A'_2, B'_2, (u_2, u'_2)]$ si et seulement s'il existe des objets $C'_1$, $C'_2$ et des isomorphismes $u' : A'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} A'_2 \otimes C'_2$, $v' : B'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} B'_2 \otimes C'_2$ de $\underline{C}'$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes(A'_1\otimes C'_1), X'\otimes(A'_1\otimes C'_1)) \arrow[r, "{(a,a)}"] \arrow[d, "{(id\otimes u', id\otimes u')}"'] & ((X\otimes A'_1)\otimes C'_1, (X'\otimes A'_1)\otimes C'_1) \arrow[r, "{(u_1\otimes id, u'_1\otimes id)}"] & ((Y\otimes B'_1)\otimes C'_1, (Y'\otimes B'_1)\otimes C'_1) \\
(X\otimes(A'_2\otimes C'_2), X'\otimes(A'_2\otimes C'_2)) \arrow[d, "{(a,a)}"'] & & (Y\otimes(B'_1\otimes C'_1), Y'\otimes(B'_1\otimes C'_1)) \arrow[u, "{(a,a)}"'] \arrow[d, "{(id\otimes v', id\otimes v')}"] \\
((X\otimes A'_2)\otimes C'_2, (X'\otimes A'_2)\otimes C'_2) \arrow[r, "{(u_2\otimes id, u'_2\otimes id)}"] & ((Y\otimes B'_2)\otimes C'_2, (Y'\otimes B'_2)\otimes C'_2) & (Y\otimes(B'_2\otimes C'_2), Y'\otimes(B'_2\otimes C'_2)) \arrow[l, "{(a,a)}"']
\end{tikzcd}$$

soit commutatif dans $(\underline{C}\times\underline{C}')^{\mathcal{S}}$, $\mathcal{S}$ étant la partie multiplicative de $\underline{C}\times\underline{C}'$ engendrée par les endomorphismes $(c_{Z,Z}, c_{Z,Z})$.

Considérons le foncteur $R : \underline{P} \longrightarrow \underline{P}$ défini par

$$(X, X') \longmapsto (X, X') \otimes (Z, \underline{1})$$

$R$ est bien une équivalence puisque $(Z, \underline{1})$ est inversible dans $\underline{P}$. Ensuite étudions le foncteur $\mathfrak{G} : \underline{\mathcal{P}} \longrightarrow \underline{P}$ donné par

$$\begin{tikzcd}
(X, m) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{\langle \alpha, \beta, u\rangle}"'] & (X, \bigotimes_m Z) \arrow[d, "{[\bigotimes_\alpha Z, \bigotimes_\beta Z, (\check{u}, \mathring{u})]}"] \\
(Y, n) \arrow[r, mapsto] & (Y, \bigotimes_n Z)
\end{tikzcd}$$

où

$$\bigotimes_m Z = \underbrace{(\dots(Z\otimes Z)\otimes Z \dots)\otimes Z}_{m \text{ fois}} \quad \text{si } m > 0$$

$$\bigotimes_m Z = \underline{1} \quad \text{si } m = 0$$

(il en de même de $\bigotimes_n Z$, $\bigotimes_\alpha Z$, $\bigotimes_\beta Z$)

$\check{u}$ est défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\dots((X\otimes \underbrace{Z)\otimes Z)\dots)\otimes Z}_{\alpha \text{ fois}} & \xrightarrow{u} & (\dots((Y\otimes \underbrace{Z)\otimes Z)\dots)\otimes Z}_{\beta \text{ fois}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X\otimes(\underset{\alpha}{\otimes} Z) & \xrightarrow{\check{u}} & Y\otimes(\underset{\beta}{\otimes} Z) \end{array}$$

les flèches verticales étant construites à l'aide de la contrainte d'associativité uniquement et dans le cas où $\alpha = 0$ (resp. $\beta = 0$) de la flèche $d_X : X \to X\otimes \underline{1}$ (resp. $d_Y : Y \to Y\otimes \underline{1}$) ;

$\mathring{u}$ est la flèche

$$(\underset{m}{\otimes} Z) \otimes (\underset{\alpha}{\otimes} Z) \xrightarrow{\mathring{u}} (\underset{n}{\otimes} Z) \otimes (\underset{\beta}{\otimes} Z)$$

construite à l'aide des contraintes d'associativité et d'unité.

Le foncteur $\mathcal{G}$ n'est pas en général fidèle. Prenons l'exemple suivant :

Soit $\underline{C}$ la catégorie de R-modules (R étant un anneau unitaire quelconque) munie de la loi $\oplus$ somme directe, les contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité étant les contraintes habituelles. Soit Z un R-module quelconque différent de 0. Considérons dans $\underline{P}$ deux flèches suivantes :

$$\langle 4, 4, c_{Z,Z} \oplus id_{Z\oplus Z}\rangle,\ \langle 4, 4, id_{Z\oplus Z} \oplus c_{Z,Z}\rangle : (0,0) \longrightarrow (0,0)$$

où

$$c_{Z,Z} \oplus id_{Z\oplus Z} : Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z \longrightarrow Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z$$
$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \longmapsto (z_2, z_1, z_3, z_4)$$

$$id_{Z\oplus Z} \oplus c_{Z,Z} : Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z \longrightarrow Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z$$
$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \longmapsto (z_1, z_2, z_4, z_3)$$

Nous avons bien

$$\langle 4, 4, c_{Z,Z} \oplus id_{Z \oplus Z} \rangle \neq \langle 4, 4, id_{Z \oplus Z} \oplus c_{Z,Z} \rangle$$

Considérons les images de ces flèches par $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G}\langle 4, 4, c_{Z,Z} \oplus id_{Z \oplus Z} \rangle = \langle Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, (c_{Z,Z} \oplus id_{Z \oplus Z}, id_{Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z}) \rangle$$

$$\mathcal{G}\langle 4, 4, id_{Z \oplus Z} \oplus c_{Z,Z} \rangle = \langle Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, (id_{Z \oplus Z} \oplus c_{Z,Z}, id_{Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z}) \rangle$$

Or le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z) \arrow[r, "{(c_{Z,Z} \oplus id_{Z \oplus Z},\, id_{Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z})}"] \arrow[d, "{(c_{Z \oplus Z, Z \oplus Z},\, c_{Z \oplus Z, Z \oplus Z})}"'] & (Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z) \arrow[d, "{(c_{Z \oplus Z, Z \oplus Z},\, c_{Z \oplus Z, Z \oplus Z})}"] \\
(Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z) \arrow[r, "{(id_{Z \oplus Z} \oplus c_{Z,Z},\, id_{Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z})}"] & (Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z)
\end{tikzcd}$$

est commutatif dans $\underline{C} \times \underline{C}'$, et a fortiori dans $(\underline{C} \times \underline{C}')^{\mathcal{Y}}$, ce qui montre que

$$\mathcal{G}\langle 4, 4, c_{Z,Z} \oplus id_{Z \oplus Z} \rangle = \mathcal{G}\langle 4, 4, id_{Z \oplus Z} \oplus c_{Z,Z} \rangle$$

Cet exemple peut s'appliquer dans la catégorie homotopique pointée $\underline{Htp}_*$ où l'on prend pour $Z$ la 1-sphère $S^1$.

Ces considérations faites, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

<u>Proposition 7</u>. – Soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU, $Z$ un objet quelconque de $\underline{C}$ différent de l'objet unité $\underline{1}$, $\underline{C}'$ la sous-catégorie $\otimes$-stable de $\underline{C}$ engendrée par $Z$, $(F, \check{F}) : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ le foncteur ACU de $\underline{C}'$ dans $\underline{C}$ défini par $FX' = X'$, $\check{F}_{X', Y'} = id_{X \otimes Y}$, $(\underline{\mathcal{P}}, i, p)$ la catégorie de Suspension de $\underline{C}$ définie par $Z$, $(\underline{P}, \varphi, \check{\varphi})$ la catégorie de fractions de $\underline{C}$ définie par $(\underline{C}', (F, \check{F}))$, et $\mathcal{G}$ le foncteur de $\underline{\mathcal{P}}$ dans $\underline{P}$ défini par

$$\begin{tikzcd}
(X, m) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{\langle \alpha, \beta, u \rangle}"'] & (X, \underset{m}{\otimes} Z) \arrow[d, "{[\underset{\alpha}{\otimes} Z,\ \underset{\beta}{\otimes} Z,\ (\check{u}, \mathring{u})]}"] \\
(Y, n) \arrow[r, mapsto] & (Y, \underset{n}{\otimes} Z)
\end{tikzcd}$$

Si le foncteur $\underline{G}$ n'est pas fidèle, alors il est impossible de construire dans la catégorie de suspension $\underline{\mathcal{P}}$ une loi $\otimes$ de telle sorte que $\underline{\mathcal{P}}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU, l'équivalence $p : \underline{\mathcal{P}} \to \underline{\mathcal{P}}$ le foncteur $(X, m) \mapsto (X, m) \otimes iZ$, et le foncteur $i$ immergé dans un couple $(i, \check{i})$ qui est un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$.

<u>Démonstration</u>.- Supposons que $\underline{\mathcal{P}}$ soit munie d'une loi $\otimes$ et des contraintes de telle sorte que $\underline{\mathcal{P}}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU, l'équivalence $p : \underline{\mathcal{P}} \to \underline{\mathcal{P}}$ le foncteur $(X, m) \mapsto (X, m) \otimes iZ$, ce qui implique que $iZ$ est inversible dans $\underline{\mathcal{P}}$, et le foncteur $i$ immergé dans un couple $(i, \check{i})$ qui est un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$. En vertu de (§2, n°1, Prop. 1) il existe un $\otimes$-foncteur $(E', \check{E}')$ de $\underline{P}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$ tel que $(i, \check{i}) \cong (E', \check{E}') \circ (\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$, et par suite ~~$i \cong E'\mathcal{D}$~~.

$$(12) \qquad i \simeq E'\mathcal{D}$$

D'autre part la définition des foncteurs $\mathcal{D}, i, \mathcal{G}, p, R$ nous donne

$$(13) \qquad \mathcal{G} i = \mathcal{D}$$

$$(14) \qquad R\mathcal{G} \simeq \mathcal{G} p$$

et compte tenu en plus de (12)

$$E'R(X, X') = E'((X \otimes X') \otimes \mathcal{D}Z) \overset{\check{E}'}{\simeq} E'(X, X') \otimes E'\mathcal{D}Z \simeq E'(X, X') \otimes iZ =$$

$$= pE'(X, X')$$

pour tout $(X, X') \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$. Donc

$$E'R \simeq pE' \tag{15}$$

On ~~en~~ déduit de (12), (13), (14), (15)

$$E'\mathcal{G}i \simeq i \,,\quad pE'\mathcal{G} \simeq E'\mathcal{G}p$$

D'où, en appliquant la proposition 3

$$E'\mathcal{G} \simeq id_{\underline{\mathcal{P}}}$$

i.e $\mathcal{G}$ est un foncteur fidèle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Table des matières

Chapitre I. — $\otimes$. Catégories et $\otimes$. foncteurs.

§1. $\otimes$- Catégories

1. Définition des $\otimes$- catégories.
2. Exemples des $\otimes$- catégories.

§2. Contraintes pour une loi $\otimes$.

1. Contraintes d'associativité.
2. Contrainte de commutativité.
3. Contraintes d'unité.

§3. Compatibilité entre contraintes.

1. Associativité et commutativité.
2. Associativité et unité.
3. Commutativité et unité.
4. Associativité, commutativité et unité.
5. Objets inversibles.

§4. $\otimes$- Foncteurs.

1. Définition des $\otimes$- foncteurs.
2. Compatibilités avec des contraintes.

§5. $\otimes$- Equivalences.

1. Définition des équivalences.
2. Transport de structures.

Chapitre II. – Gr. catégories et Pic. catégories

§1. Gr. catégories.

1. Définition des Gr. catégories.

2. Premiers invariants d'une Gr. catégorie.

3. Structure des Gr. catégories.

§2. Pic. catégories.

1. Définition des Pic. catégories.

2. Structure des Pic. catégories.

Chapitre III. – Pic. enveloppe d'une ⊗. catégorie ACU.

§1. Le problème de rendre des objets "objets unité".

1. Le problème de rendre des endomorphismes des identités.

2. Le problème de rendre des objets "objet unité".

§2. Le problème d'inverser des objets.

1. Construction de la ⊗. catégorie de fractions d'une ⊗. catégorie ACU

2. Pic. enveloppe d'une ⊗. catégorie ACU.

§3. Applications

1. Groupe de Grothendieck et groupe de Whitehead.

2. Catégorie de suspension.

## Bibliographie


[1] Bass, H : K-theory and stable algebra. Publ. math. de l'IHES, n° 22.

[2] Bénabou, J. : Thèse, Paris 1966.

[3] Bourbaki : Théorie des ensembles.

[4] ———— : Algèbre commutative.

[5] ———— : Algèbre multilinéaire.

[6] Deligne, P. : Champs de Picard strictement commutatifs. SGA 4 XVIII.

[7] Eilenberg, S. et Kelly, G.M : Closed category. Proceedings of the conference on categorical algebra (421-561). Springer-Verlag 1965.

[8] Freyd, P. : Stable homotopy. Proceedings of the conference on categorical algebra (121-176). Springer-Verlag 1965.

[9] Grothendieck, A. : Biextensions de faisceaux de groupes. SGA 7, exposé VII.

[10] — : Catégories cofibrées additives et complexe cotangent relatif. Lecture notes in mathematics N° 79. Springer-Verlag 1968.

[11] Mac-Lane, S. : Categorical Algebra. Bull. Amer. Mat. Soc. 71 (1965).

[12] — : Homology. Springer-Verlag 1967.

[13] Mitchell, B. : Theory of categories. Academic Press 1965.

[14] Neantro Saavedra Rivano : Thèse, Paris (1970?)

[15] — : Catégories tannakiennes. Lecture notes in mathematics N° 265. Springer-Verlag 1972.

[16] Spanier, E : Algebraic topology. Mc Graw-Hill Inc. 1966.